Herrn Director Dr. Krüger

zu Braunschweig

empfiehlt sich

Dr. Münscher.

Zu der

öffentlichen Prüfung der Schüler

des

Kurfürstlichen Gymnasiums

zu

MARBURG

im Jahre 1856

welche

am 17. 18. und 19. Merz stattfinden wird

ladet ergebenst ein

der

Gymnasialdirector

Dr. FRIEDRICH MÜNSCHER.

Inhalt: I. Abhandlung des früheren Gymnasiallehrers Dr. Grebe.
II. Schulnachrichten.

Dr. Grebe

Marburg.

Elwert'sche Universitäts-Buchdruckerei.

1856.

Eine Gruppe von Aufgaben über das geradlinige Dreieck.

Bekanntlich schneiden sich die drei Höhen des geradlinigen oder ebenen Dreiecks in demselben Punkte. Dieser Punkt liegt bei dem spitzwinkeligen Dreieck, welches diese Abhandlung ausschliesslich berücksichtigt, innerhalb der Figur. Es erscheinen alsdann sowohl die drei Seiten als die drei Höhen des Dreiecks als die Summen je zweier Segmente, deren wir mithin im Ganzen zwölf zählen, nämlich sechs Seitensegmente, drei obere und drei untere Höhensegmente. Im Allgemeinen ist das Dreieck bestimmt, wenn drei dieser Segmente gegeben sind. Wir stellen uns daher die Aufgabe:

Wenn von den zwölf Segmenten der Seiten und Höhen eines spitzwinkeligen ebenen Dreiecks drei gegeben sind, das ganze Dreieck zu finden.

Durch die Beschränkung unserer Aufgabe, deren hier vorliegende Behandlung hauptsächlich für strebsamere Schüler geschrieben ist, auf das spitzwinkelige Dreieck soll dem Anfänger die gleichzeitige Betrachtung mehrerer Figuren erspart und die Gewinnung einer möglichst grossen Anzahl von Lesern aus dem angedeuteten Kreise erzielt werden. Der weiter Fortgeschrittene wird ohne Schwierigkeit das hier Gebotene verallgemeinern können.

Wir bezeichnen die bei unserer Aufgabe vorkommenden zwölf Segmente mit einzelnen Buchstaben, wie dieses in Fig. 1 dargestellt ist. Die Buchstaben sind so gewählt, dass die Seitensegmente eine frühere Stelle als die übrigen im Alphabete einnehmen, dass dann die oberen Höhensegmente folgen, und die untern Höhensegmente den Schluss machen. Bilden wir rein combinatorisch die verschiedenen Zusammenstellungen je dreier Segmente in alphabetischer Anordnung, so gelangen wir zu nachfolgender Tabelle, welche zugleich als Register benutzt werden kann. Die 220 Fälle, welche dieselbe enthält, bilden jedoch keineswegs ebenso viele

verschiedene Aufgaben. Vielmehr ist die Zahl der letzteren viel geringer und reducirt sich auf nur 43, oder, wenn man die letzte, welche eine unmögliche ist, weglässt, auf 42. Zu der wievielten Aufgabe ein jeder der 220 Fälle gehöre, ist durch die beigesetzte Nummer ausgedrückt.

hik 21.	*hmv* 40.	*ilm* 29.	*iqw* 23.	*kpv* 22.	*lqw* 26.	*npv* 23.
hil 25.	*hmw* 18.	*iln* 42.	*iuv* 10.	*kpw* 17.	*luv* 13.	*npw* 43.
him 25.	*hno* 37.	*ilo* 20.	*iuw* 13.	*kqu* 8.	*luw* 30.	*nqu* 19.
hin 21.	*hnp* 6.	*ilp* 41.	*ivw* 30.	*kqv* 43.	*lvw* 10.	*nqv* 17.
hio 27.	*hnq* 37.	*ilq* 34.	*klm* 21.	*kqw* 23.	*mno* 4.	*nqw* 22.
hip 4.	*hnu* 9.	*ilu* 33.	*kln* 25.	*kuv* 10.	*mnp* 4.	*nuv* 30.
hiq 4.	*hnv* 39.	*ilv* 18.	*klo* 4.	*kuw* 30.	*mnq* 27.	*nuw* 10.
hiu 1.	*hnw* 9.	*ilw* 40.	*klp* 27.	*kvw* 13.	*mnu* 24.	*nvw* 13.
hiv 24.	*hop* 16.	*imn* 25.	*klq* 4.	*lmn* 21.	*mnv* 24.	*opq* 31.
hiw 24.	*hoq* 38.	*imo* 15.	*klu* 24.	*lmo* 6.	*mnw* 1.	*opu* 11.
hkl 25.	*hou* 22.	*imp* 35.	*klv* 1.	*lmp* 37.	*mop* 5.	*opv* 11.
hkm 42.	*hov* 17.	*imq* 15.	*klw* 24.	*lmq* 37.	*moq* 16.	*opw* 2.
hkn 29.	*how* 19.	*imu* 14.	*kmn* 25.	*lmu* 39.	*mou* 23.	*oqu* 11.
hko 41.	*hpq* 5.	*imv* 28.	*kmo* 34.	*lmv* 9.	*mov* 8.	*oqv* 2.
hkp 20.	*hpu* 43.	*imw* 14.	*kmp* 41.	*lmw* 9.	*mow* 43.	*oqw* 11.
hkq 34.	*hpv* 23.	*ino* 41.	*kmq* 20.	*lno* 34.	*mpq* 38.	*ouv* 12.
hku 18.	*hpw* 8.	*inp* 34.	*kmu* 40.	*lnp* 20.	*mpu* 36.	*ouw* 12.
hkv 33.	*hqu* 3.	*inq* 20.	*kmv* 18.	*lnq* 41.	*mpv* 26.	*ovw* 7.
hkw 40.	*hqv* 36.	*inu* 18.	*kmw* 33.	*lnu* 40.	*mpw* 3.	*pqu* 2.
hlm 29.	*hqw* 26.	*inv* 40.	*kno* 35.	*lnv* 33.	*mqu* 17.	*pqv* 11.
hln 29.	*huv* 13.	*inw* 33.	*knp* 15.	*lnw* 18.	*mqv* 19.	*pqw* 11.
hlo 15.	*huw* 10.	*iop* 38.	*knq* 15.	*lop* 16.	*mqw* 22.	*puv* 12.
hlp 15.	*hvw* 30.	*ioq* 16.	*knu* 28.	*loq* 5.	*muv* 30.	*puw* 7.
hlq 35.	*ikl* 21.	*iou* 22.	*knv* 14.	*lou* 23.	*muw* 13.	*pvw* 12.
hlu 14.	*ikm* 29.	*iov* 19.	*knw* 14.	*lov* 43.	*mvw* 10.	*quv* 7.
hlv 14.	*ikn* 29.	*iow* 17.	*kop* 38.	*low* 8.	*nop* 5.	*quw* 12.
hlw 28.	*iko* 37.	*ipq* 5.	*koq* 5.	*lpq* 38.	*noq* 38.	*qvw* 12.
hmn 21.	*ikp* 37.	*ipu* 3.	*kou* 26.	*lpu* 17.	*nou* 26.	*uvw* 32.
hmo 20.	*ikq* 6.	*ipv* 26.	*kov* 3.	*lpv* 22.	*nov* 36.	
hmp 34.	*iku* 9.	*ipw* 36.	*kow* 36.	*lpw* 19.	*now* 3.	
hmq 41.	*ikv* 9.	*iqu* 43.	*kpq* 16.	*lqu* 36.	*npq* 16.	
hmu 33.	*ikw* 39.	*iqv* 8.	*kpu* 19.	*lqv* 3.	*npu* 8.	

Umgekehrt weist die nun folgende Tabelle nach, wie viele der 220 Fälle und welche

zu einer jeden der erwähnten 43 Aufgaben der Reihe nach gehören. Da die Zahl der zu derselben Nummer gehörenden Fälle nie über sechs hinausgeht, so ist bei denselben die alphabetische Anordnung oft andern Rücksichten nachgesetzt worden. Insbesondere ist der Fall stets vorangestellt, welcher später genauer behandelt werden sollte.

1.	*hiu*	*klv*	*mnw*	—	—	—
2.	*pqu*	*oqv*	*opw*	—	—	—
3.	*ipu*	*hqu*	*lqv*	*kov*	*now*	*mpw*
4.	*hiq*	*hip*	*klo*	*klq*	*mnp*	*mno*
5.	*ipq.*	*hpq*	*loq*	*koq*	*nop*	*mop*
6.	*lmo*	*hnp*	*ikq*	—	—	—
7.	*ovw*	*puw*	*quv*	—	—	—
8.	*mov*	*low*	*hpw*	*npu*	*kqu*	*iqv*
9.	*lmv*	*lmw*	*hnw*	*hnu*	*iku*	*ikv*
10.	*lvw*	*mvw*	*nuw*	*huw*	*iuv*	*kuv*
11.	*pqv*	*pqw*	*oqw*	*oqu*	*opu*	*opv*
12.	*pvw*	*qvw*	*quw*	*ouw*	*ouv*	*puv*
13.	*kvw*	*nvw*	*muw*	*iuw*	*huv*	*luv*
14.	*knv*	*knw*	*imw*	*imu*	*hlu*	*hlv*
15.	*knq*	*knp*	*imo*	*imq*	*hlp*	*hlo*
16.	*kpq*	*npq*	*moq*	*ioq*	*hop*	*lop*
17.	*kpw*	*iow*	*mqu*	*lpu*	*hov*	*nqv*
18.	*hku*	*inu*	*kmv*	*ilv*	*hmw*	*lnw*
19.	*kpu*	*nqu*	*mqv*	*iov*	*how*	*lpw*
20.	*hkp*	*lnp*	*kmq*	*inq*	*hmo*	*ilo*
21.	*hik*	*hin*	*klm*	*ikl*	*hmn*	*lmn*
22.	*iou*	*hou*	*lpv*	*kpv*	*nqw*	*mqw*
23.	*lou*	*mou*	*npv*	*hpv*	*kqw*	*iqw*
24.	*hiv*	*hiw*	*klw*	*klu*	*mnu*	*mnv*
25.	*hil*	*him*	*kln*	*hkl*	*imn*	*kmn*
26.	*kou*	*nou*	*mpv*	*ipv*	*hqw*	*lqw*
27.	*hio*	*klp*	*mnq*	—	—	—
28.	*knu*	*imv*	*hlw*	—	—	—
29.	*ilm*	*hlm*	*hln*	*hkn*	*ikn*	*ikm*
30.	*ivw*	*hvw*	*luw*	*kuw*	*nuv*	*muv*

31. *opq*	—	—	—	—	—
32. *uvw*	—	—	—	—	—
33. *hkv*	*lnv*	*kmw*	*inw*	*hmu*	*ilu*
34. *hkq*	*lno*	*kmo*	*inp*	*hmp*	*ilq*
35. *kno*	*imp*	*hlq*	—	—	—
36. *mpu*	*lqu*	*hqv*	*nov*	*kow*	*ipw*
37. *lmq*	*lmp*	*hno*	*hnq*	*ikp*	*iko*
38. *lpq*	*mpq*	*noq*	*hoq*	*iop*	*kop*
39. *lmu*	*hnv*	*ikw*	—	—	—
40. *hkw*	*lnu*	*kmu*	*inv*	*hmv*	*ilw*
41. *hko*	*lnq*	*kmp*	*ino*	*hmq*	*ilp*
42. *hkm*	*iln*	—	—	—	—
43. *hpu*	*iqu*	*kqv*	*lov*	*mow*	*npw*

Die gegenseitige Anordnung unserer 43 Aufgaben beruht auf folgender Disposition, deren Gliederung in Beziehung auf die Nummern 1 — 28 sogleich vollständiger begründet werden soll.

I. Mögliche Aufgaben. Nr. 1 — 42.

1. Solche, die durch Gleichungen, welche den zweiten Grad nicht übersteigen, und mithin auch durch die Elementargeometrie gelöst werden können. Nr. 1—28.
   - A. Nr. 1 — 5.
   - B. „ 6 — 10.
   - C. „ 11 — 17.
   - D. „ 18 — 23.
   - E. „ 24 — 26.
   - F. „ 27.
   - G. „ 28.

2. Solche, die auf höhere Gleichungen führen, und mithin durch die Elementargeometrie nicht gelöst werden können. Nr. 29 — 42.
   - A. Auf eine Gleichung des dritten Grades führen Nr. 29 — 32.
   - B. Auf eine Gleichung des vierten Grades Nr. 33 — 38.
   - C. Auf eine Gleichung des fünften Grades Nr. 39. 40.
   - D. Auf eine Gleichung des sechsten Grades Nr. 41.
   - E. Auf eine Gleichung des siebenten Grades Nr. 42.

II. Eine unmögliche Aufgabe, d. h. eine solche, für welche die drei Segmente nicht alle willkürlich gegeben werden dürfen. Nr. 43.

Die Gliederung der Nummern 1 — 28 ist vorzugsweise nach geometrischen Rücksichten gemacht worden. Die geometrische Construction dieser Aufgaben ist durchaus leicht und soll sofort hier angedeutet werden.

Die Gruppe A. (Nr. 1 — 5) enthält solche Aufgaben, bei welchen man durch die gegebenen Stücke zunächst zwei mit einer Kathete nebeneinander liegende rechtwinkelige Dreiecke construiren kann (Fig. 2). Man hat zur Vollendung des Ganzen nur nöthig, Linien zu verlängern und Perpendikel zu fällen.

Die Gruppe B. (Nr. 6 — 10) umfasst die Aufgaben, bei welchen man durch die gegebenen Stücke zwei mit der Hypotenuse nebeneinander liegende rechtwinkelige Dreiecke construiren kann (Fig. 3). Man darf zur Vollendung des Ganzen nur Linien verlängern und Verbindungslinien ziehen.

In der Gruppe C. (Nr. 11 — 17) entstehen zunächst zwei rechtwinkelige Dreiecke, welche mit einem übereinstimmenden spitzen Winkel scheitelwinkelartig nebeneinander liegen (Fig. 4.). Auch hier, wie in der folgenden Gruppe, reicht das Verlängern von Linien und das Ziehen von Verbindungslinien zur Vollendung des Ganzen hin.

Gruppe D. (Nr. 18 — 23) unterscheidet sich dadurch (Fig. 5), dass man zunächst zwei rechtwinkelige Dreiecke construiren kann, die mit einem übereinstimmenden spitzen Winkel in antiparalleler Weise aufeinander liegen.

Die Aufgaben E. (Nr. 24 — 26) sind Anwendungen der Kreisaufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, für welchen zwei nicht parallele Sehnen und das äussere Segment der einen bis zu dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte gegeben sind. Sobald diese Aufgabe angewandt ist (Fig. 6) genügt wie vorhin das Verlängern und Ziehen von Verbindungslinien.

Die Augaben F. und G. (Nr. 27 und 28) stehen vereinzelt. Die erstere lässt sich indessen leicht auf die Aufgabe Nr. 1 reduciren, die letztere ist eine Anwendung der Aufgabe: Ein Dreieck aus seinen drei Höhen zu construiren.

Die Auffindung algebraischer Ausdrücke für die fehlenden neun Segmente stösst bei den Aufgaben Nr. 1 — 28 gleichfalls nicht auf Schwierigkeiten. Der pythagoräische Lehrsatz und die aus der Aehnlichkeit von Dreiecken abzuleitenden Proportionen helfen in sehr vielen Fällen schon unmittelbar aus. Jedenfalls aber kann man durch die Aufstellung einer Gleichung zwi-

schen vier oder zweier Gleichungen zwischen fünf Segmenten aus drei gegebenen neue hinzufinden. So hat man z. B. in Gruppe

A. $p : h = h + i : p + v$

B. $l : p + v = w : \sqrt{p^2 - w^2}$

C. $u^2 + h^2 = n^2 + w^2$

D. $\begin{cases} k : v = q + w : m \\ o^2 = w^2 + m^2 \end{cases}$

E. $i + h : k + l = k : i$

Wir lassen daher jetzt für jede der Aufgaben Nr. 1 — 28 eine Zusammenstellung der für die fehlenden neun Segmente gefundenen algebraischen Ausdrücke folgen.

1.

$h, i, u.$

$$p = \sqrt{h^2 + u^2} \qquad q = \sqrt{i^2 + u^2} \qquad o = \frac{hi - u^2}{u}$$

$$v = \frac{hi - u^2}{\sqrt{h^2 + u^2}} \qquad w = \frac{hi - u^2}{\sqrt{i^2 + u^2}} \qquad k = \frac{u(h + i)}{\sqrt{h^2 + u^2}}$$

$$n = \frac{u(h + i)}{\sqrt{i^2 + u^2}} \qquad l = \frac{h(hi - u^2)}{u\sqrt{h^2 + u^2}} \qquad m = \frac{i(hi - u^2)}{u\sqrt{i^2 + u^2}}$$

2.

$p, q, u.$

$$h = \sqrt{p^2 - u^2} \qquad i = \sqrt{q^2 - u^2} \qquad o = \frac{\sqrt{(p^2 - u^2)(q^2 - u^2)} - u^2}{u}$$

$$v = \frac{\sqrt{(p^2 - u^2)(q^2 - u^2)} - u^2}{p} \qquad w = \frac{\sqrt{(p^2 - u^2)(q^2 - u^2)} - u^2}{q}$$

$$k = \frac{u(\sqrt{p^2 - u^2} + \sqrt{q^2 - u^2})}{p} \qquad n = \frac{u(\sqrt{p^2 - u^2} + \sqrt{q^2 - u^2})}{q}$$

$$l = \frac{(p^2 - u^2)\sqrt{q^2 - u^2} - u^2\sqrt{p^2 - u^2}}{up} \qquad m = \frac{(q^2 - u^2)\sqrt{p^2 - u^2} - u^2\sqrt{q^2 - u^2}}{uq}$$

3.

$i,\ p,\ u.$

$$q = \sqrt{i^2 + u^2} \qquad h = \sqrt{p^2 - u^2} \qquad o = \frac{i\sqrt{p^2 - u^2} - u^2}{u}$$

$$v = \frac{i\sqrt{p^2 - u^2} - u^2}{p} \qquad w = \frac{i\sqrt{p^2 - u^2} - u^2}{\sqrt{i^2 + u^2}} \qquad k = \frac{u(i + \sqrt{p^2 - u^2})}{p}$$

$$n = \frac{u(i + \sqrt{p^2 - u^2})}{\sqrt{i^2 + u^2}} \qquad l = \frac{ip^2 - iu^2 - u^2\sqrt{p^2 - u^2}}{up} \qquad m = \frac{i^2\sqrt{p^2 - u^2} - iu^2}{u\sqrt{i^2 + u^2}}$$

4.

$h,\ i,\ q.$

$$u = \sqrt{q^2 - i^2} \qquad p = \sqrt{q^2 - i^2 + h^2} \qquad o = \frac{hi + i^2 - q^2}{\sqrt{q^2 - i^2}}$$

$$v = \frac{hi + i^2 - q^2}{\sqrt{h^2 + q^2 - i^2}} \qquad w = \frac{hi + i^2 - q^2}{q} \qquad k = \frac{(h + i)\sqrt{q^2 - i^2}}{\sqrt{h^2 + q^2 - i^2}}$$

$$n = \frac{(h + i)\sqrt{q^2 - i^2}}{q} \qquad l = \frac{h(hi + i^2 - q^2)}{\sqrt{(h^2 + q^2 - i^2)(q^2 - i^2)}} \qquad m = \frac{i(hi + i^2 - q^2)}{q\sqrt{q^2 - i^2}}$$

5.

$i,\ p,\ q.$

$$u = \sqrt{q^2 - i^2} \qquad h = \sqrt{p^2 - q^2 + i^2} \qquad o = \frac{i\sqrt{p^2 - q^2 + i^2} - q^2 + i^2}{\sqrt{q^2 - i^2}}$$

$$v = \frac{i\sqrt{p^2 - q^2 + i^2} - q^2 + i^2}{p} \qquad w = \frac{i\sqrt{p^2 - q^2 + i^2} - q^2 + i^2}{q}$$

$$k=\frac{(i+\sqrt{p^2-q^2+i^2})\sqrt{q^2-i^2}}{p}\qquad n=\frac{(i+\sqrt{p^2-q^2+i^2})\sqrt{q^2-i^2}}{q}$$

$$l=\frac{i\,(p^2-q^2+i^2)-(q^2-i^2)\sqrt{p^2-q^2+i^2}}{p\sqrt{q^2-i^2}}\qquad m=\frac{i^2\sqrt{p^2-q^2+i^2}-i\,(q^2-i^2)}{q\sqrt{q^2-i^2}}$$

6.

l, m, o.

$$v=\sqrt{o^2-l^2}\qquad w=\sqrt{o^2-m^2}\qquad k=\frac{l\,(o^2-l^2)+m\sqrt{(o^2-l^2)(o^2-m^2)}}{l^2+m^2-o^2}$$

$$q=\frac{(o^2-l^2)\sqrt{o^2-m^2}+lm\sqrt{o^2-l^2}}{l^2+m^2-o^2}\qquad n=\frac{m\,(o^2-m^2)+l\sqrt{(o^2-l^2)\,(o^2-m^2)}}{l^2+m^2-o^2}$$

$$p=\frac{(o^2-m^2)\sqrt{o^2-l^2}+lm\sqrt{o^2-m^2}}{l^2+m^2-o^2}\qquad u=\frac{(o^2-l^2)\,(o^2-m^2)+lm\sqrt{(o^2-l^2)\,(o^2-m^2)}}{o\,(l^2+m^2-o^2)}$$

$$i=\frac{m\,(o^2-l^2)\sqrt{o^2-m^2}+lm^2\sqrt{o^2-l^2}}{o\,(l^2+m^2-o^2)}\qquad h=\frac{l\,(o^2-m^2)\sqrt{o^2-l^2}+l^2m\sqrt{o^2-m^2}}{o\,(l^2+m^2-o^2)}$$

7.

o, v, w.

$$l=\sqrt{o^2-v^2}\qquad m=\sqrt{o^2-w^2}\qquad k=\frac{v^2\sqrt{o^2-v^2}+vw\sqrt{o^2-w^2}}{o^2-v^2-w^2}$$

$$q=\frac{v^2w+v\sqrt{(o^2-v^2)\,(o^2-w^2)}}{o^2-v^2-w^2}\qquad n=\frac{w^2\sqrt{o^2-w^2}+vw\sqrt{o^2-v^2}}{o^2-v^2-w^2}$$

$$p=\frac{vw^2+w\sqrt{(o^2-v^2)\,(o^2-w^2)}}{o^2-v^2-w^2}\qquad u=\frac{v^2w^2+vw\sqrt{(o^2-v^2)\,(o^2-w^2)}}{o\,(o^2-v^2-w^2)}$$

$$i=\frac{v^2w\sqrt{o^2-w^2}+v\,(o^2-w^2)\sqrt{o^2-v^2}}{o\,(o^2-v^2-w^2)}\qquad h=\frac{vw^2\sqrt{o^2-v^2}+w\,(o^2-v^2)\sqrt{o^2-w^2}}{o\,(o^2-v^2-w^2)}$$

8.

m, o, v.

$$w = \sqrt{o^2 - m^2} \qquad l = \sqrt{o^2 - v^2} \qquad k = \frac{v^2\sqrt{o^2 - v^2} + vm\sqrt{o^2 - m^2}}{m^2 - v^2}$$

$$q = \frac{v^2\sqrt{o^2 - m^2} + vm\sqrt{o^2 - v^2}}{m^2 - v^2} \qquad n = \frac{m(o^2 - m^2) + v\sqrt{(o^2 - m^2)(o^2 - v^2)}}{m^2 - v^2}$$

$$p = \frac{v(o^2 - m^2) + m\sqrt{(o^2 - m^2)(o^2 - v^2)}}{m^2 - v^2} \qquad u = \frac{v^2(o^2 - m^2) + vm\sqrt{(o^2 - m^2)(o^2 - v^2)}}{o(m^2 - v^2)}$$

$$i = \frac{v^2 m\sqrt{o^2 - m^2} + vm^2\sqrt{o^2 - v^2}}{o(m^2 - v^2)} \qquad h = \frac{v(o^2 - m^2)\sqrt{o^2 - v^2} + m(o^2 - v^2)\sqrt{o^2 - m^2}}{o(m^2 - v^2)}$$

9.

l, m, v.

$$o = \sqrt{l^2 + v^2} \qquad w = \sqrt{l^2 + v^2 - m^2} \qquad k = \frac{v^2 l + vm\sqrt{l^2 + v^2 - m^2}}{m^2 - v^2}$$

$$q = \frac{v^2\sqrt{l^2 + v^2 - m^2} + vlm}{m^2 - v^2} \qquad n = \frac{m(l^2 + v^2 - m^2) + vl\sqrt{l^2 + v^2 - m^2}}{m^2 - v^2}$$

$$p = \frac{v(l^2 + v^2 - m^2) + lm\sqrt{l^2 + v^2 - m^2}}{m^2 - v^2} \qquad u = \frac{v^2(l^2 + v^2 - m^2) + vlm\sqrt{l^2 + v^2 - m^2}}{(m^2 - v^2)\sqrt{l^2 + v^2}}$$

$$i = \frac{v^2 m\sqrt{l^2 + v^2 - m^2} + vm^2 l}{(m^2 - v^2)\sqrt{l^2 + v^2}} \qquad h = \frac{lv(l^2 + v^2 - m^2) + l^2 m\sqrt{l^2 + v^2 - m^2}}{(m^2 - v^2)\sqrt{l^2 + v^2}}$$

10.

l, v, w.

$$o = \sqrt{v^2 + l^2} \qquad m = \sqrt{v^2 + l^2 - w^2} \qquad k = \frac{v^2 l + vw\sqrt{v^2 + l^2 - w^2}}{l^2 - w^2}$$

$$q = \frac{v^2 w + v l \sqrt{v^2 + l^2 - w^2}}{l^2 - w^2} \qquad n = \frac{w^2 \sqrt{v^2 + l^2 - w^2} + v w l}{l^2 - w^2}$$

$$p = \frac{v w^2 + w l \sqrt{v^2 + l^2 - w^2}}{l^2 - w^2} \qquad u = \frac{v^2 w^2 + v w l \sqrt{v^2 + l^2 - w^2}}{(l^2 - w^2) \sqrt{v^2 + l^2}}$$

$$i = \frac{v^2 w \sqrt{v^2 + l^2 - w^2} + v l (v^2 + l^2 - w^2)}{(l^2 - w^2) \sqrt{v^2 + l^2}} \qquad h = \frac{v l w^2 + w l^2 \sqrt{v^2 + l^2 - w^2}}{(l^2 - w^2) \sqrt{v^2 + l^2}}$$

11.

p, q, v.

$$w = \frac{p v}{q} \qquad k = \sqrt{q^2 - v^2} \qquad n = \frac{p}{q} \sqrt{q^2 - v^2}$$

$$l = \frac{v^2 + p v}{\sqrt{q^2 - v^2}} \qquad m = \frac{v}{q} \frac{(q^2 + p v)}{\sqrt{q^2 - v^2}} \qquad o = \frac{v \sqrt{p^2 + q^2 + 2 p v}}{\sqrt{q^2 - v^2}}$$

$$u = \frac{p \sqrt{q^2 - v^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + 2 p v}} \qquad h = \frac{p (p + v)}{\sqrt{p (p + v) + q (q + \frac{p v}{q})}} \qquad i = \frac{q (q + \frac{p v}{q})}{\sqrt{p (p + v) + q (q + \frac{p v}{q})}}$$

12.

p, v, w.

$$q = \frac{p v}{w} \qquad k = \frac{v}{w} \sqrt{p^2 - w^2} \qquad n = \sqrt{p^2 - w^2}$$

$$l = \frac{w (p + v)}{\sqrt{p^2 - w^2}} \qquad m = \frac{(p v + w^2)}{\sqrt{p^2 - w^2}} \qquad o = \frac{\sqrt{p^2 v^2 + p^2 w^2 + 2 p v w^2}}{\sqrt{p^2 - w^2}}$$

$$u=\frac{pv\sqrt{p^2-w^2}}{\sqrt{p^2v^2+p^2w^2+2pvw^2}}\quad h=\frac{p(p+v)}{\sqrt{p(p+v)+\frac{pv}{w}(\frac{pv}{w}+w)}}\quad i=\frac{\frac{pv}{w}(\frac{pv}{w}+w)}{\sqrt{p(p+v)+\frac{pv}{w}(\frac{pv}{w}+w)}}$$

Anm. Aus dieser oder der vorigen Aufgabe folgt das Stattfinden nachstehender sich durch eine gewisse Symmetrie auszeichnenden Gleichungen.

$$h^2=\frac{p^2(p+v)^2}{p(p+v)+q(q+w)}\quad hi=\frac{p(p+v)q(q+w)}{p(p+v)+q(q+w)}\quad i^2=\frac{q^2(q+w)^2}{p(p+v)+q(q+w)}$$

13.

$k,\ v,\ w.$

$$q=\sqrt{v^2+k^2}\qquad p=\frac{w\sqrt{v^2+k^2}}{v}\qquad n=\frac{wk}{v}$$

$$l=\frac{w\sqrt{v^2+k^2}+v^2}{k}\qquad m=\frac{v\sqrt{v^2+k^2}+vw}{k}$$

$$o=\frac{\sqrt{(v^2+w^2)(v^2+k^2)+2wv^2\sqrt{v^2+k^2}}}{k}\quad u=\frac{wk\sqrt{v^2+k^2}}{\sqrt{(v^2+w^2)(v^2+k^2)+2wv^2\sqrt{v^2+k^2}}}$$

$$h=\frac{w^2(v^2+k^2)+v^2w\sqrt{v^2+k^2}}{v\sqrt{(v^2+w^2)(v^2+k^2)+2v^2w\sqrt{v^2+k^2}}}\quad i=\frac{v(v^2+k^2)+vw\sqrt{v^2+k^2}}{\sqrt{(v^2+w^2)(v^2+k^2)+2v^2w\sqrt{v^2+k^2}}}$$

14.

$k,\ n,\ v.$

$$q=\sqrt{k^2+v^2}\qquad p=\frac{n\sqrt{k^2+v^2}}{k}\qquad w=\frac{nv}{k}$$

$$l=\frac{kv^2+nv\sqrt{k^2+v^2}}{k^2}\qquad m=\frac{nv^2+kv\sqrt{k^2+v^2}}{k^2}$$

$$o = \frac{v\sqrt{(k^2+n^2)(k^2+v^2)+2knv\sqrt{k^2+v^2}}}{k^2} \quad u = \frac{kn\sqrt{k^2+v^2}}{\sqrt{(k^2+n^2)(k^2+v^2)+2knv\sqrt{k^2+v^2}}}$$

$$h = \frac{n^2(k^2+v^2)+knv\sqrt{k^2+v^2}}{k\sqrt{(k^2+n^2)(k^2+v^2)+2knv\sqrt{k^2+v^2}}} \quad i = \frac{k(k^2+v^2)+nv\sqrt{k^2+v^2}}{\sqrt{(k^2+n^2)(k^2+v^2)+2knv\sqrt{k^2+v^2}}}$$

15.

$k, n, q.$

$$v = \sqrt{q^2-k^2} \qquad p = \frac{nq}{k} \qquad w = \frac{n\sqrt{q^2-k^2}}{k}$$

$$l = \frac{k(q^2-k^2)+nq\sqrt{q^2-k^2}}{k^2} \qquad m = \frac{qk\sqrt{q^2-k^2}+n(q^2-k^2)}{k^2}$$

$$o = \frac{\sqrt{q^2-k^2}}{k^2}\sqrt{n^2q^2+k^2q^2+2nkq\sqrt{q^2-k^2}} \quad u = knq : \sqrt{n^2q^2+k^2q^2+2nkq\sqrt{q^2-k^2}}$$

$$h = \frac{n^2q^2+knq\sqrt{q^2-k^2}}{k\sqrt{k^2q^2+n^2q^2+2knq\sqrt{q^2-k^2}}} \quad i = \frac{kq^2+nq\sqrt{q^2-k^2}}{\sqrt{k^2q^2+n^2q^2+2knq\sqrt{q^2-k^2}}}$$

16.

$k, p, q.$

$$v = \sqrt{q^2-k^2} \qquad w = \frac{p\sqrt{q^2-k^2}}{q} \qquad n = \frac{pk}{q}$$

$$l = \frac{q^2-k^2+p\sqrt{q^2-k^2}}{k} \qquad m = \frac{p(q^2-k^2)+q^2\sqrt{q^2-k^2}}{qk}$$

$$o = \frac{\sqrt{q^2-k^2}\sqrt{p^2+q^2+2p\sqrt{q^2-k^2}}}{k} \qquad u = pk : \sqrt{p^2+q^2+2p\sqrt{q^2-k^2}}$$

$$h=\frac{p\,(p+\sqrt{q^2-k^2})}{\sqrt{p(p+\sqrt{q^2-k^2})+q\,(q+\frac{p}{q}\sqrt{q^2-k^2})}}\quad i=\frac{q\,(q+\frac{p}{q}\sqrt{q^2-k^2})}{\sqrt{p(p+\sqrt{q^2-k^2})+q\,(q+\frac{p}{q}\sqrt{q^2-k^2})}}$$

17.

$k,\ p,\ w.$

$$n=\sqrt{p^2-w^2}\qquad q=\frac{pk}{\sqrt{p^2-w^2}}\qquad v=\frac{kw}{\sqrt{p^2-w^2}}$$

$$m=\frac{w^2\sqrt{p^2-w^2}+pkw}{p^2-w^2}\qquad l=\frac{w^2k+pw\sqrt{p^2-w^2}}{p^2-w^2}$$

$$o=\frac{\sqrt{p^2w^2\,(k^2+p^2-w^2)+2pkw^3\sqrt{p^2-w^2}}}{p^2-w^2}\quad u=\frac{pk\sqrt{p^2-w^2}}{\sqrt{p^2\,(k^2+p^2-w^2)+2pwk\sqrt{p^2-w^2}}}$$

$$i=\frac{p^2k^2+pwk\sqrt{p^2-w^2}}{\sqrt{p^2-w^2}\sqrt{p^2\,(k^2+p^2-w^2)+2pwk\sqrt{p^2-w^2}}}\quad h=\frac{pwk+p^2\sqrt{p^2-w^2}}{\sqrt{p^2(k^2+p^2-w^2)+2pwk\sqrt{p^2-w^2}}}$$

18.

$h,\ k,\ u.$

$$p=\sqrt{h^2+u^2}\qquad i=\frac{k\sqrt{h^2+u^2}-uh}{u}\qquad v=\frac{hk}{u}-\sqrt{h^2+u^2}$$

$$q=\sqrt{\frac{h^2k^2}{u^2}-\frac{2hk}{u}\sqrt{h^2+u^2}+h^2+u^2+k^2}$$

$$w=\frac{hk\sqrt{h^2+u^2}-u\,(h^2+u^2)}{\sqrt{h^2k^2-2hku\sqrt{h^2+u^2}+u^2\,(h^2+u^2+k^2)}}$$

$$o=\frac{hk\sqrt{h^2+u^2}-u\,(h^2+u^2)}{u^2}\qquad l=\frac{h^2k-uh\sqrt{h^2+u^2}}{u^2}$$

$$n = \frac{k\,u\sqrt{h^2+u^2}}{\sqrt{h^2 k^2 - 2\,h\,k\,u\sqrt{h^2+u^2} + u^2\,(h^2+u^2+k^2)}}$$

$$m = \frac{h\,(k^2+u^2)\,(h^2+u^2) - k\,u\,(2\,h^2+u^2)\sqrt{h^2+u^2}}{u^2\sqrt{h^2 k^2 - 2\,h\,k\,u\sqrt{h^2+u^2} + u^2\,(h^2+u^2+k^2)}}$$

19.

k, p, u.

$$h = \sqrt{p^2 - u^2} \qquad i = \frac{p\,k}{u} - \sqrt{p^2-u^2} \qquad q = \sqrt{\frac{p^2 k^2}{u^2} - \frac{2\,p\,k}{u}\sqrt{p^2-u^2} + p^2}$$

$$v = \frac{k}{u}\sqrt{p^2-u^2} - p \qquad o = \frac{p\,k\sqrt{p^2-u^2} - p^2\,u}{u^2}$$

$$w = \frac{p\,k\sqrt{p^2-u^2} - p^2\,u}{\sqrt{p^2 k^2 - 2\,p\,k\,u\sqrt{p^2-u^2} + p^2\,u^2}} \qquad l = \frac{k\,(p^2-u^2)}{u^2} - \frac{p\sqrt{p^2-u^2}}{u}$$

$$m = \frac{p^2\,(k^2+u^2)\sqrt{p^2-u^2} - p\,k\,u\,(2\,p^2-u^2)}{u^2\sqrt{p^2 k^2 - 2\,p\,k\,u\sqrt{p^2-u^2} + p^2\,u^2}} \qquad n = pk : \sqrt{\frac{p^2 k^2}{u^2} - \frac{2\,p\,k}{u}\sqrt{p^2-u^2} + p^2}$$

20.

h, k, p.

$$u = \sqrt{p^2 - h^2} \qquad i = \frac{k\,p}{\sqrt{p^2-h^2}} - h \qquad v = \frac{h\,k}{\sqrt{p^2-h^2}} - p$$

$$q = \frac{\sqrt{(k^2+p^2-h^2)\,p^2 - 2\,h\,k\,p\sqrt{p^2-h^2}}}{\sqrt{p^2-h^2}} \qquad w = \frac{h\,k\,p - p^2\sqrt{p^2-h^2}}{\sqrt{(k^2+p^2-h^2)\;p^2 - 2\,h\,k\,p\sqrt{p^2-h^2}}}$$

$$o = \frac{h\,k\,p - p^2\sqrt{p^2-h^2}}{p^2-h^2} \qquad l = \frac{h^2\,k - h\,p\sqrt{p^2-h^2}}{p^2-h^2}$$

$$n=\frac{kp\sqrt{p^2-h^2}}{\sqrt{(k^2+p^2-h^2)\,p^2-2hkp\sqrt{p^2-h^2}}}\qquad m=\frac{hp^2(k^2+p^2-h^2)-kp(h^2+p^2)\sqrt{p^2-h^2}}{(p^2-h^2)\sqrt{(k^2+p^2-h^2)p^2-2hkp\sqrt{p^2-h^2}}}$$

21.

h, i, k.

$$l=\frac{i^2+ih-k^2}{k}\qquad p=\frac{h(h+i)}{\sqrt{(h+i)^2-k^2}}\qquad v=\frac{i^2+ih-k^2}{\sqrt{(h+i)^2-k^2}}$$

$$u=\frac{hk}{\sqrt{(h+i)^2-k^2}}\qquad o=\frac{(h+i)(i^2+ih-h^2)}{k\sqrt{(h+i)^2-k^2}}$$

$$q=\sqrt{\frac{(h+i)^2i^2+(h^2-i^2)k^2}{(h+i)^2-k^2}}\qquad w=\frac{h(h+i)(i^2+ih-k^2)}{\sqrt{(h+i)^2-k^2}\,\sqrt{(h+i)^2i^2+(h^2-i^2)k^2}}$$

$$m=\frac{i(h+i)(i^2+ih-k^2)}{k\sqrt{(h+i)^2i^2+(h^2-i^2)k^2}}\qquad n=\frac{hk(h+i)}{\sqrt{(h+i)^2i^2+(h^2-i^2)k^2}}$$

22.

i, o, u.

$$q=\sqrt{u^2+i^2}\qquad w=\frac{ou}{\sqrt{u^2+i^2}}\qquad m=\frac{oi}{\sqrt{u^2+i^2}}$$

$$h=\frac{u^2+uo}{i}\qquad n=\frac{u(u^2+i^2+ou)}{i\sqrt{u^2+i^2}}\qquad p=\frac{u\sqrt{(o+u)^2+i^2}}{i}$$

$$v=\frac{oi}{\sqrt{(o+u)^2+i^2}}\qquad l=\frac{o(o+u)}{\sqrt{(o+u)^2+i^2}}\qquad k=\frac{u^2+i^2+ou}{\sqrt{(o+u)^2+i^2}}$$

23.

l, o, u.

$$v = \sqrt{o^2 - l^2} \qquad p = \frac{o\,u}{\sqrt{o^2 - l^2}} \qquad h = \frac{u\,l}{\sqrt{o^2 - l^2}}$$

$$k = \frac{o^2 + o\,u - l^2}{l} \qquad i = \frac{(o+u)\sqrt{o^2 - l^2}}{l}$$

$$q = \frac{\sqrt{o^2 u^2 + (o^2 + 2\,o\,u)(o^2 - l^2)}}{l} \qquad w = \frac{o\,u\,l}{\sqrt{o^2 u^2 + (o^2 + 2\,o\,u)(o^2 - l^2)}}$$

$$n = \frac{o^2 u^2 + o\,u\,(o^2 - l^2)}{\sqrt{o^2 - l^2}\,\sqrt{o^2 u^2 + (o^2 + 2\,o\,u)(o^2 - l^2)}} \qquad m = \frac{o\,(o+u)\sqrt{o^2 - l^2}}{\sqrt{o^2 u^2 + (o^2 + 2\,o\,u)(o^2 - l^2)}}$$

24.

h, i, v.

$$p = \sqrt{h^2 + hi + \tfrac{1}{4}v^2} - \tfrac{1}{2}v \qquad u = \sqrt{hi + \tfrac{1}{2}v^2 - v\sqrt{h^2 + hi + \tfrac{1}{4}v^2}}$$

$$q = \sqrt{i^2 + hi + \tfrac{1}{2}v^2 - v\sqrt{h^2 + hi + \tfrac{1}{4}v^2}} \qquad k = \sqrt{i^2 + hi - \tfrac{1}{2}v^2 - v\sqrt{h^2 + hi + \tfrac{1}{4}v^2}}$$

$$o = \frac{v\sqrt{h^2 + hi + \tfrac{1}{4}v^2} - \tfrac{1}{2}v^2}{\sqrt{hi + \tfrac{1}{2}v^2 - v\sqrt{h^2 + hi + \tfrac{1}{4}v^2}}} \qquad w = \frac{v\sqrt{h^2 + hi + \tfrac{1}{4}v^2} - \tfrac{1}{2}v^2}{\sqrt{i^2 + hi + \tfrac{1}{2}v^2 - v\sqrt{h^2 + hi + \tfrac{1}{4}v^2}}}$$

$$l = \frac{h\,v}{\sqrt{h\,i + \tfrac{1}{2}v^2 - v\sqrt{h^2 + hi + \tfrac{1}{4}v^2}}} \qquad n = \frac{(h+i)\sqrt{h\,i + \tfrac{1}{2}v^2 - v\sqrt{h^2 + hi + \tfrac{1}{4}v^2}}}{\sqrt{i^2 + h\,i + \tfrac{1}{2}v^2 - v\sqrt{h^2 + h\,i + \tfrac{1}{4}v^2}}}$$

$$m = \frac{i\,v\sqrt{h^2 + h\,i + \tfrac{1}{4}v^2} - \tfrac{1}{2}\,i\,v^2}{\sqrt{h\,i + \tfrac{1}{2}v^2 - v\sqrt{h^2 + h\,i + \tfrac{1}{4}v^2}}\,\sqrt{i^2 + h\,i + \tfrac{1}{2}v^2 - v\sqrt{h^2 + h\,i + \tfrac{1}{4}v^2}}}$$

Anm. Drückt man u ebensowohl durch h, i, v als durch i, h, w aus, setzt die Ausdrücke gleich und reducirt, so erhält man eine Gleichung zwischen h, i, v, w:

$$\left(\frac{w\,i}{v} - \frac{v\,h}{w}\right)^2 = \frac{(v^2 - w^2)\,(i-h)}{h+i}$$

25.

h, i, l.

$$k=\sqrt{i^2+ih+\tfrac{1}{4}l^2}-\tfrac{1}{2}l \qquad p=\frac{h(h+i)}{\sqrt{h^2+hi-\frac{1}{2}l^2+l\sqrt{i^2+ih+\frac{1}{4}l^2}}}$$

$$v=\frac{l\sqrt{i^2+ih+\frac{1}{4}l^2}-\frac{1}{2}l^2}{\sqrt{h^2+hi-\frac{1}{2}l^2+l\sqrt{i^2+ih+\frac{1}{4}l^2}}} \qquad o=\frac{l(h+i)}{\sqrt{h^2+hi-\frac{1}{2}l^2+l\sqrt{i^2+ih+\frac{1}{4}l^2}}}$$

$$u=\frac{h\sqrt{i^2+ih+\frac{1}{4}l^2}-\frac{1}{2}hl}{\sqrt{h^2+hi-\frac{1}{2}l^2+l\sqrt{i^2+ih+\frac{1}{4}l^2}}} \quad q=\sqrt{\frac{hi(h+i)^2+(h^2-i^2)l(\frac{1}{2}l-\sqrt{i^2+ih+\frac{1}{4}l^2})}{h^2+hi-\frac{1}{2}l^2+l\sqrt{i^2+ih+\frac{1}{4}l^2}}}$$

$$m=\frac{i(h+i)l}{\sqrt{hi(h+i)^2+(h^2-i^2)l(\frac{1}{2}l-\sqrt{i^2+ih+\frac{1}{4}l^2})}}$$

$$n=\frac{h(h+i)(\sqrt{i^2+ih+\frac{1}{4}l^2}-\frac{1}{2}l)}{\sqrt{hi(h+i)^2+(h^2-i^2)l(\frac{1}{2}l-\sqrt{i^2+ih+\frac{1}{4}l^2})}}$$

$$w=\frac{h(h+i)l(\sqrt{i^2+ih+\frac{1}{4}l^2})-\frac{1}{2}l)}{\sqrt{h^2+hi-\frac{1}{2}l^2+l\sqrt{i^2+ih+\frac{1}{4}l^2}}\sqrt{hi(h+i)^2+(h^2-i^2)l(\frac{1}{2}l-\sqrt{i^2+ih+\frac{1}{4}l^2})}}$$

26.

k, o, u.

$$l=\sqrt{o^2+ou+\tfrac{1}{4}k^2}-\tfrac{1}{2}k \qquad v=\sqrt{k\sqrt{o^2+ou+\tfrac{1}{4}k^2}-ou-\tfrac{1}{2}k^2}$$

$$q=\sqrt{k\sqrt{o^2+ou+\tfrac{1}{4}k^2}-ou+\tfrac{1}{2}k^2} \qquad i=\sqrt{k\sqrt{o^2+ou+\tfrac{1}{4}k^2}-ou-u^2+\tfrac{1}{2}k^2}$$

$$p=\frac{ou}{\sqrt{k\sqrt{o^2+ou+\frac{1}{4}k^2}-ou-\frac{1}{2}k^2}} \qquad w=\frac{ou}{\sqrt{k\sqrt{o^2+ou+\frac{1}{4}k^2}-ou+\frac{1}{2}k^2}}$$

$$h=\frac{u\sqrt{o^2+ou+\frac{1}{4}k^2}-\frac{1}{2}uk}{\sqrt{k\sqrt{o^2+ou+\frac{1}{4}k^2}-ou-\frac{1}{2}k^2}}\qquad m=\frac{o\sqrt{k\sqrt{o^2+ou+\frac{1}{4}k^2}-ou-u^2+\frac{1}{2}k^2}}{\sqrt{k\sqrt{o^2+ou+\frac{1}{4}k^2}-ou+\frac{1}{2}k^2}}$$

$$n=\frac{ouk}{\sqrt{k^2(o^2+ou)+o^2u^2-2ouk\sqrt{o^2+ou+\frac{1}{4}k^2}}}$$

27.

h, i, o.

$$u=\sqrt{hi+\tfrac{1}{4}o^2}-\tfrac{1}{2}o\qquad p=\sqrt{h^2+hi+\tfrac{1}{2}o^2-o\sqrt{hi+\tfrac{1}{4}o^2}}$$

$$q=\sqrt{i^2+hi+\tfrac{1}{2}o^2-o\sqrt{hi+\tfrac{1}{4}o^2}}\qquad v=\frac{o\sqrt{hi+\frac{1}{4}o^2}-\frac{1}{2}o^2}{\sqrt{h^2+hi+\frac{1}{2}o^2-o\sqrt{hi+\frac{1}{4}o^2}}}$$

$$w=\frac{o\sqrt{hi+\frac{1}{4}o^2}-\frac{1}{2}o^2}{\sqrt{i^2+hi+\frac{1}{2}o^2-o\sqrt{hi+\frac{1}{4}o^2}}}\qquad l=\frac{ho}{\sqrt{h^2+hi+\frac{1}{2}o^2-o\sqrt{hi+\frac{1}{4}o^2}}}$$

$$m=\frac{io}{\sqrt{i^2+hi+\frac{1}{2}o^2-o\sqrt{hi+\frac{1}{4}o^2}}}\qquad k=\frac{(h+i)\left(\sqrt{hi+\frac{1}{4}o^2}-\frac{1}{2}o\right)}{\sqrt{h^2+hi+\frac{1}{2}o^2-o\sqrt{hi+\frac{1}{4}o^2}}}$$

$$n=\frac{(h+i)\left(\sqrt{hi+\frac{1}{4}o^2}-\frac{1}{2}o\right)}{\sqrt{i^2+hi+\frac{1}{2}o^2-o\sqrt{hi+\frac{1}{4}o^2}}}$$

28.

k, n, u.

$$p=\frac{2kn^2u^2}{\sqrt{(kn+ku+nu)(kn+ku-nu)(kn+nu-ku)(ku+nu-kn)}}$$

$$q=\frac{2nk^2u^2}{\sqrt{(kn+ku+nu)(kn+ku-nu)(kn+nu-ku)(ku+nu-kn)}}$$

$$h = \frac{u\,(k^2 n^2 + n^2 u^2 - k^2 u^2)}{\sqrt{(kn + ku + nu)\,(kn + ku - nu)\,(kn + nu - ku)\,(ku + nu - kn)}}$$

$$i = \frac{u\,(k^2 n^2 + k^2 u^2 - n^2 u^2)}{\sqrt{(kn + ku + nu)\,(kn + ku - nu)\,(kn + nu - ku)\,(ku + nu - kn)}}$$

$$o = \frac{2k^2 n^2 u\,(k^2 n^2 - k^2 u^2 - n^2 u^2)}{(kn + ku + nu)\,(kn + ku - nu)\,(kn + nu - ku)\,(ku + nu - kn)}$$

$$v = \frac{k\,(k^2 n^2 - k^2 u^2 - n^2 u^2)}{\sqrt{(kn + ku + nu)\,(kn + ku - nu)\,(kn + nu - ku)\,(ku + nu - kn)}}$$

$$w = \frac{n\,(k^2 n^2 - k^2 u^2 - n^2 u^2)}{\sqrt{(kn + ku + nu)\,(kn + ku - nu)\,(kn + nu - ku)\,(ku + nu - kn)}}$$

$$l = \frac{k\,(k^2 n^2 + n^2 u^2 - k^2 u^2)\,(k^2 n^2 - k^2 u^2 - n^2 u^2)}{(kn + ku + nu)\,(kn + ku - nu)\,(kn + nu + ku)\,(ku + nu - kn)}$$

$$m = \frac{n\,(k^2 n^2 + k^2 u^2 - n^2 u^2)\,(k^2 n^2 - k^2 u^2 - n^2 u^2)}{(kn + ku + nu)\,(kn + ku - nu)\,(kn + nu - ku)\,(ku + nu - kn)}$$

Indem wir nun zu den Aufgaben fortschreiten, welche algebraisch nur durch Gleichungen, die den zweiten Grad übersteigen, gelöst werden können, wird es genügen, bei den einzelnen Nummern in der Regel nur eine Gleichung höheren Grades für eins der fehlenden neun Segmente zu entwickeln, nach dessen Auffindung die Aufgabe auf eine der bereits behandelten Nummern reducirt erscheint.

29.

i, l, m.

Wenn man nach Anleitung der Formel 21. n. für k, l, m als gegebene Stücke i ausdrückt, so erhält man

$$i = \frac{km\,(k + l)}{\sqrt{(k + l)^2\, l^2 + (k^2 - l^2)\, m^2}}$$

Quadirt man diese Gleichung, hebt den Bruch rechts durch $k + l$, schafft sodann den Nenner

weg und vollendet die Reduction in Beziehung auf k, so ergibt sich die vollständige kubische Gleichung

$$k^3 + lk^2 - \frac{i^2 (l^2 + m^2) k}{m^2} = \frac{li^2 (l^2 - m^2)}{m^2}$$

Aus derselben leitet man leicht die nachstehende symmetrische Relation zwischen k, l, m, i ab:

$$\frac{k^3 + k^2 l + l i^2}{l^3 + l^2 k + k m^2} = \frac{i^2}{m^2}$$

Auch kann man durch Elimination von k nach Heranziehung der Formel 21. l. zu einer Gleichung zwischen h, i, l, m gelangen, welcher sich die symmetrische Gestalt

$$\frac{(l^2 - m^2)(h - i)}{h + i} = \left(\frac{mh}{l} - \frac{li}{m}\right)^2$$

geben lässt. Diese Gleichung ist der in der Anmerkung zu Nr. 24 gegebenen sehr ähnlich.

30.

i, v, w.

Aus 24. Anm. ergibt sich als Gleichung für h:

$$v^4 h^3 + v^2 i (v^2 - 2w^2) h^2 + (w^4 i^2 - 2v^2 w^2 i^2 + v^4 w^2 - v^2 w^4) h + (w^4 i^3 - v^4 w^2 i + v^2 w^4 i) = 0$$

31.

o, p, q.

Wenn man die Gleichung 2. o. in Beziehnng auf u reducirt, so erhält man:

$$2\,o u^3 + (o^2 + p^2 + q^2) u^2 = p^2 q^2$$

Durch analoge Gleichungen könnte man die übrigen untern Höhensegmente finden. Will man eine Gleichung für ein Seitensegment, z. B. h, so darf man nur zwischen der obigen Gleichung und

$$p^2 = u^2 + h^2$$

u eliminiren.

Anm. 1. Bezeichnet man den Winkel des ganzen Dreiecks, durch welchen o geht, mit A,

so findet sich dieser Winkel auch zwischen q und v, und es ist $v = q . \cos A$. Setzt man diesen Werth in die Gleichung

$$2pv^3 + (o^2 + p^2 + q^2)\, v^2 = o^2 q^2$$

so erhält man nach einer Division durch q^2

$$2\, p\, q \cos A^3 + (o^2 + p^2 + q^2) \cos A^2 = o^2$$

Wird nun $\sec A$ durch x bezeichnet, so ist

$$x^3 - \frac{o^2 + p^2 + q^2}{o^2}\, x = \frac{2\, p\, q}{o^2}$$

Diese Gleichung veranlasst zu der Frage, ob

$$4\left(\frac{o^2 + p^2 + q^2}{o^2}\right)^3 \gtreqless 27\left(\frac{2\, p\, q}{o^2}\right)^2$$

Da indessen $\frac{(o^2 + p^2 + q^2)^3}{o^2\, p^2\, q^2}$ seinen kleinsten Werth in dem Falle hat, in welchem $o = p = q$ (vergl. Anm. 2), und dieser kleinste Werth $= 27$ ist, so wird bei einer Ungleichheit von o, p und q stets $(o^2 + p^2 + q^2)^3 > 27\, o^2 p^2 q^2$ sein, und die gestellte Frage sich dahin beantworten, dass die linke Seite grösser als die rechte sei. Darum tritt in der Gleichung für x der irreducibele Fall ein. Sie hat drei reelle Wurzeln, von denen jedoch für uns nur die eine positive zu gebrauchen ist. Darum ergibt sich auch für $\cos A$ nur ein Werth. Zu diesem führen die Formeln

$$\lambda = \sqrt{\frac{o^2 + p^2 + q^2}{3}} \qquad \sin 3\varphi = \frac{o\, p\, q}{\lambda^3} \qquad \cos A = \frac{o}{2 \lambda \sin (60^0 + \varphi)}$$

Anm. 2. Ein in der vorigen Anmerkung benutzter Satz, dass nämlich

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3 + \;.\;.\;.\;.\; a_n)^n}{a_1\, a_2\, a_3\; .\; .\; .\; .\; .\; a_n}$$

dann seinen kleinsten Werth habe, wenn alle a einander gleich sind, kann leicht bewiesen werden. Betrachtet man nämlich den Zähler als constant, so hat der Nenner alsdann seinen grössten Werth. Dieses folgt aus der betreffenden Eigenschaft eines Productes von zwei Factoren.

32.

u, v, w.

Aus der Gleichung der vorigen Nummer ergibt sich, wenn man p und q durch $\frac{ou}{v}$ und $\frac{ou}{w}$ ersetzt, die Nenner wegschafft und durch ou dividirt:

$$u^2 o^3 = (u^2 v^2 + u^2 w^2 + v^2 w^2)\, o + 2 u v^2 w^2$$

Anm. Durch Betrachtungen, die den bei der vorigen Aufgabe erwähnten analog sind, gelangt man zu Formeln, deren man sich bedienen kann, um die Dreieckswinkel zu berechnen. Diese Formeln sind:

$$\mu = \sqrt{\frac{v^2 w^2 + u^2 w^2 + u^2 v^2}{3}} \qquad \sin 3\psi = \frac{u^2 v^2 w^2}{\mu^3} \qquad \cos A = \frac{v w}{2 \mu \sin (60^0 + \psi)}$$

33.

h, k, v.

Durch Reduction der Gleichung 18. v. erhält man die Gleichung für u:

$$u^4 + (h^2 - v^2)\, u^2 + 2 h k v u - h^2 k^2 = 0$$

34.

h, k, q.

Setzt man in die Gleichung der vorigen Nummer statt v^2 den Werth $q^2 - k^2$ ein, so erhält man:

$$u^4 + (h^2 + k^2 - q^2)\, u^2 + 2 h k \sqrt{q^2 - k^2}\,.\, u - h^2 k^2 = 0$$

35.

k, n, o.

Aus 28. o. ergibt sich die Gleichung für u:

$$o\,(k^4 - 2k^2 n^2 + n^4)\, u^4 - 2 k^2 n^2 (k^2 + n^2)\, u^3 - 2\, o\, k^2 n^2 (k^2 + n^2)\, u^2 + 2 k^4 n^4 u + o\, k^4 n^4 = 0$$

36.

m, p, u.

Aus 3. m. folgt die Gleichung für i:

$$(p^2 - u^2)\, i^4 - 2u^2 \sqrt{p^2 - u^2}\; .\; i^3 + u^2\,(u^2 - m^2)\, i^2 - m^2 u^4 = 0$$

37.

l, m, q.

Aus $pv = qw$ in Verbindung mit $l^2 + v^2 = m^2 + w^2$ ergibt sich

$$v^2 = \frac{q^2 m^2 - q^2 l^2}{q^2 - p^2} \qquad w^2 = \frac{p^2 m^2 - p^2 l^2}{q^2 - p^2}$$

$$q^2 - v^2 = \frac{q^2\,(q^2 - p^2 + l^2 - m^2)}{q^2 - p^2} \qquad p^2 - w^2 = \frac{p^2\,(q^2 - p^2 + l^2 - m^2}{q^2 - p^2}$$

Hiernach ist $\dfrac{q^2 - p^2 + l^2 - m^2}{q^2 - p^2}$ jedenfalls etwas Positives und also

$$\sqrt{q^2 - v^2}\,\sqrt{p^2 - w^2} = \frac{p\,q\,(q^2 - p^2 + l^2 - m^2)}{q^2 - p^2}$$

Da nun noch 3. o. $ou = i\sqrt{p^2 - u^2} - u^2$, so ist auch

$$ou = l\sqrt{q^2 - v^2} - v^2 = m\sqrt{p^2 - w^2} - w^2$$

Daraus folgt in Verbindung mit $l^2 + v^2 = m^2 + w^2$

$$l\sqrt{q^2 - v^2} - m\sqrt{p^2 - w^2} = v^2 - w^2$$

$$l^2\,(q^2 - v^2) - 2\,l\,m\sqrt{q^2 - v^2}\,\sqrt{p^2 - w^2} + m^2\,(p^2 - w^2) = (v^2 - w^2)^2$$

Substituirt man statt des hier vorkommenden Products von Wurzeln den vorhin gefundenen Ausdruck und multiplicirt mit dessen Nenner, so hat man

$$(l^2 q^2 - 2\,l q m p + m^2 p^2)\,(q^2 - p^2 + l^2 - m^2) = (v^2 - w^2)^2\,(q^2 - p^2)$$

$$\frac{q^2 - p^2 + l^2 - m^2}{q^2 - p^2} = \left(\frac{m^2 - l^2}{l q - m p}\right)^2$$

Aus dieser bemerkenswerthen symmetrischen Gleichung zwischen l, m, p, q folgt durch Reduction eine Gleichung des vierten Grades für p:

$$m^2 p^4 - 2lmq p^3 + (l^2 - m^2)(q^2 - l^2) p^2 - 2lmq(m^2 - l^2 - q^2) p - (l^2 m^2 q^2 + l^2 q^4 - m^4 q^2) = 0$$

Ueber das Fortsetzen der Rechnung, nachdem p gefunden ist, vergleiche man die nächste Aufgabe.

38.

l, p, q.

Aus der in der vorigen Nummer angeführten symmetrischen Gleichung zwischen l, m, p, q ergibt sich auch durch Reduction eine Gleichung des vierten Grades für m:

$$q^2 m^4 - 2lpq m^3 + (l^2 + p^2)(p^2 - q^2) m^2 - 2lpq(p^2 - q^2 - l^2) m + (l^2 p^2 q^2 - l^2 q^4 - l^4 p^2) = 0$$

Hat man hiernach m gefunden und ist mithin l, m, p, q bekannt, welcher Fall auch vorliegt, wenn bei der vorigen Nummer p gefunden ist, so handelt es sich nun weiter darum, eins der übrigen Segmente zu berechnen. Wir wählen das Segment o und leiten für dieses hier noch eine Formel ab.

Der Formel 5. w. gemäss haben wir

$$u = \frac{l\sqrt{q^2 - o^2 + l^2} - o^2 + l^2}{o} \qquad u = \frac{m\sqrt{p^2 - o^2 + m^2} - o^2 + m^2}{o}$$

Mithin ist $l\sqrt{q^2 - o^2 + l^2} - m\sqrt{p^2 - o^2 + m^2} = m^2 - l^2$

$$l^2(q^2 - o^2) + m^2(p^2 - o^2) + 2l^2 m^2 = 2lm\sqrt{q^2 - o^2 + l^2}\sqrt{p^2 - o^2 + m^2}$$

$$\left(o^2 - \frac{l^2 q^2 - m^2 p^2}{l^2 - m^2}\right)^2 = 4 l^2 m^2 \cdot \frac{p^2 - q^2}{l^2 - m^2}$$

und somit schliesslich

$$o = \sqrt{\frac{l^2 q^2 - m^2 p^2}{l^2 - m^2} + 2lm\sqrt{\frac{p^2 - q^2}{l^2 - m^2}}}$$

Das Zeichen $+$ vor dem innern Wurzelzeichen bedarf noch einer besondern Rechtfertigung. Diese wird dadurch zu Stande gebracht, dass man beweist $\frac{l^2 q^2 - m^2 p^2}{l^2 - m^2}$ sei immer negativ. Offenbar ist dem so, wenn $\frac{lq - mp}{l - m}$ stets negativ ist. Da p und q den

Cosinussen, m und l aber den Sinussen der Dreieckswinkel B und C, durch welche p und q geht, proportional ist, so handelt es sich um das Vorzeichen von $\frac{\sin C \cos C - \sin B \cos B}{\sin C - \sin B}$ oder $\frac{\sin 2B - \sin 2C}{\sin B - \sin C}$ oder $\frac{\sin(B-C)\cos(B+C)}{\sin B - \sin C}$. Weil nun nach der Seite 1. gemachten Voraussetzung die Dreieckswinkel B und C spitz sind, so hat $\sin(B-C)$ mit $\sin B - \sin C$ einerlei Vorzeichen, und hängt daher die Beschaffenheit des Ausdrucks allein von $\cos(B+C)$ ab. Dieser aber ist $= -\cos A$ und folglich, weil auch A ein spitzer Winkel ist, negativ.

39.

l, m, u.

Drückt man nach Aufgabe 23. $h+i$ doppelt aus, sowohl durch l, o, u als durch m, o, u, so erhält man eine Gleichung zwischen l, m, o, u. Wird diese in Beziehung auf o reducirt, so erreicht sie den fünften Grad und lautet:

$$o^5 + 2uo^4 - (l^2+m^2-u^2)o^3 - 2u(l^2+m^2)o^2 + (l^2m^2 - l^2u^2 - m^2u^2)o + 2ul^2m^2 = 0$$

40.

h, k, w.

Wenn man nach Anleitung der Formel 36. l. für die gegebenen Stücke l, h, w einen Ausdruck für k bildet, und die so erhaltene Gleichung für l reducirt, so ergibt sich:

$$(h^4 - 2h^2w^2 + w^4)l^5 + k(h^4 - 2h^2w^2 + w^4)l^4 - 2kh^2w^2(h^2+w^2)l^2 - h^4w^4l + kh^4w^4 = 0$$

41.

h, k, o.

Durch Reduction von 18. o. in Beziehung auf u findet man:

$$u^6 + 2ou^5 + (2h^2 + o^2)u^4 + 2oh^2u^3 + h^2(h^2 - k^2)u^2 - h^4k^2 = 0$$

42.

h, k, m.

Schafft man in der Formel 21. m. den Nenner weg, quadrirt und dividirt auf beiden Seiten durch $h+i$, so erhält man

$$k^2 m^2 ((h+i) i^2 + (h-i) k^2) = i^2 (h+i) (i^2 + ih - k^2)^2$$

Diese Gleichung ist für i eine Gleichung des siebenten Grades und lautet reducirt:

$$i^7 + 3hi^6 + (3h^2 - 2k^2) i^5 + (h^3 - 4hk^2) i^4 + (k^4 - 2h^2 k^2 - k^2 m^2) i^3 + hk^2 (k^2 - m^2) i^2 + k^4 m^2 i - hk^4 m^2 = 0$$

43.

h, p, u.

Die drei Segmente dürfen in dieser Nummer nicht von einander unabhängig gegeben sein, sondern es muss die Relation zwischen denselben stattfinden, dass $h^2 + u^2 = p^2$. Es ist also durch zwei gegebene das dritte Segment schon bestimmt. Solche zwei reichen aber dann zur Auffindung der fehlenden neun Segmente nicht hin, sondern es kann noch eins dieser letztern willkürlich gewählt werden.

Wir haben nunmehr die ganze Gruppe von Aufgaben, welche zusammen die grössere Aufgabe ausmachen, von den zwölf Segmenten der Seiten und Höhen eines spitzwinkeligen Dreiecks neun aus drei gegebenen zu finden, im Einzelnen betrachtet. Die Art der Betrachtung entsprach dem Lösen von Aufgaben, und es wurde desshalb auf die gesetzlichen Beziehungen, welche zwischen einem Complexe von Segmenten bestehen, nur gelegentlich hingewiesen. Freilich ist schon eine jede Gleichung, durch welche ein Segment aus drei andern gefunden wird, eine solche gesetzliche Beziehung, aber diese erscheint dann in der Regel nicht in ihrer einfachsten und elegantesten Form. Statt unsere ganze Gruppe von Aufgaben, wie es geschehen ist, aufzulösen, hätten wir auch die verschiedenen gesetzlichen Beziehungen, welche zwischen je vier Segmenten bestehen, in möglichst einfacher Gestalt entwickeln können. Dann wäre etwa folgender Weg einzuschlagen gewesen. Wir hätten die zwölf Segmente h, i, k, l, m, n, o, p, q, u, v, w vollständig zu vieren combinirt und hätten $\frac{12.\ 11.\ 10.\ 9.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$ oder 495 Combinationen erhalten. Von diesen wären zunächst alle diejenigen auszuscheiden gewesen, in welchen drei Segmente aus demselben rechtwinkeligen Dreieck zugleich vorgekommen wären.

Die Zahl derselben hätte 6. 9 oder 54 betragen. Bei den übrigbleibenden 441 Combinationen hätten wir dann nachgesehen, welche denselben Fall darstellen. Wir hätten gefunden, dass 15mal je drei und 66mal je sechs Combinationen demselben Fall angehören. Dadurch wären 81 Fälle entstanden, 15 mit symmetrisch und 66 mit unsymmetrisch angeordneten Elementen. Die 81 diesen Fällen entsprechenden Gleichungen wären nun der Reihe nach entwickelt worden. Eine Zusammestellung dieser 81 Gleichungen böte selbst auf unserem dermaligen Standpunkte vielleicht einiges Interesse dar. Doch verzichten wir darauf, sie vollständig zu geben, da viele der fraglichen Gleichungen doch nur wenig von den Formeln, die wir bereits aufgeführt haben, abweichen würden. Nur als Probe soll hier eine Zusammenstellung der 15 symmetrischen Gleichungen folgen.

I. $hikl$, $(hikm,\ klmn)$.

$$i^2 + ih = k^2 + kl$$

II. $hikn$, $(hlmn,\ iklm)$.

$$\frac{h^3 + h^2 i + i n^2}{i^3 + i^2 h + h k^2} = \frac{n^2}{k^2}$$

III. $hilm$, $(hkln,\ ikmn)$.

$$\frac{(l^2 - m^2)(h - i)}{h + i} = \left(\frac{hm}{l} - \frac{il}{m}\right)^2$$

IV. $hiou$, $(klpv,\ mnqw)$.

$$ih = u^2 + ou$$

V. $hipq$, $(kloq,\ mnop)$.

$$p^2 - h^2 = q^2 - i^2$$

VI. $hivw$, $(kluw,\ mnuv)$.

$$\frac{(w^2 - v^2)(h - i)}{h + i} = \left(\frac{vh}{w} - \frac{wi}{v}\right)^2$$

VII. $hlop$, $(imoq,\ knpq)$.

$$ho = pl$$

VIII. $hlqw$, $(impv,\ knou)$.

$$(h^2 - l^2)^2 q w^4 - 2 h^2 l^2 (h^2 + l^2)(q + w) + h^4 l^4 (q + 2w) = 0$$

IX. $hluv$, $(imuw,\ knvw)$.

$$hv = lu$$

X. $h\,n\,o\,q$, $(i\,k\,o\,p,\ l\,m\,p\,q)$.

$$\frac{h^2 - n^2 + q^2 - o^2}{q^2 - o^2} = \left(\frac{h^2 - n^2}{o\,n - h\,q}\right)^2$$

XI. $h\,n\,p\,v$, $(i\,k\,q\,w,\ l\,m\,o\,u)$.

$$(p^2 - h^2)\,(p^2 - n^2)\,(p + v)^2 = h^2\,n^2\,v^2$$

XII. $h\,n\,u\,w$, $(i\,k\,u\,v,\ l\,m\,v\,w)$.

$$h^2 + u^2 = n^2 + w^2$$

XIII. $o\,p\,q\,u$, $(o\,p\,q\,v,\ o\,p\,q\,w)$.

$$2\,o\,u^3 + (o^2 + p^2 + q^2)\,u^2 = p^2\,q^2$$

XIV. $o\,p\,u\,v$, $(o\,q\,u\,w,\ p\,q\,v\,w)$.

$$o\,u = p\,v$$

XV. $o\,u\,v\,w$, $(o\,q\,u\,w,\ p\,q\,v\,w)$.

$$u^2\,o^3 = (u^2\,v^2 + u^2\,w^2 + v^2\,w^2)\,o + 2\,u\,v\,w^2$$

Ueberall, wo es sich bei unserer Aufgabe um die gegenseitige Relation von vier Segmenten handelt, können die verschiedenen Gleichungen, welche diese Relation darzustellen geeignet sind, als Umwandlungen einer und derselben Gleichung betrachtet werden. Eine dieser Umwandlungen (ausnahmsweise wohl auch gleichzeitig mehrere) wird als der einfachste Ausdruck der fraglichen Relation zu betrachten sein. Der Practiker gelangt gewöhnlich ohne Schwierigkeit zu diesem einfachsten Ausdruck und übersieht den Mangel theoretischer Vorschriften. Fühlbar aber wird dieser Mangel, welcher sich auch auf die Feststellung des Begriffs von einfachsten Gleichungen zwischen mehreren in einem Abhängigkeitsverhältniss stehenden Veränderlichen erstreckt, in einem Falle, wie der sogleich zu erwähnende ist.

Zwischen demselben Complexe von fünf Segmenten bestehen bei unserer Aufgabe immer unzählig viele Paare von Gleichungen. Diese Paare sind so beschaffen, dass weder die Reihe der ersten Gleichungen, noch auch die Reihe der zweiten Gleichuugen Umformungen derselben Grundgleichungen sind. Man kann daher die Frage aufwerfen: *Welcher Weg ist einzuschlagen, um das einfachste Paar zusammengehöriger Gleichungen aufzufinden?* oder auch: *Welches ist, abgesehen von der andern, überhaupt die einfachste Gleichung, die zwischen denselben fünf Segmenten besteht?* Aehnliche Fragen könnte man in Beziehung auf die drei Gleichungen, die zwischen denselben sechs Segmenten bestehen u. s. w. stellen. Es lohnte sich wohl der Mühe, wenn es Jemand unternähme, dergleichen Fragen in allgemeiner Weise zu beantworten.

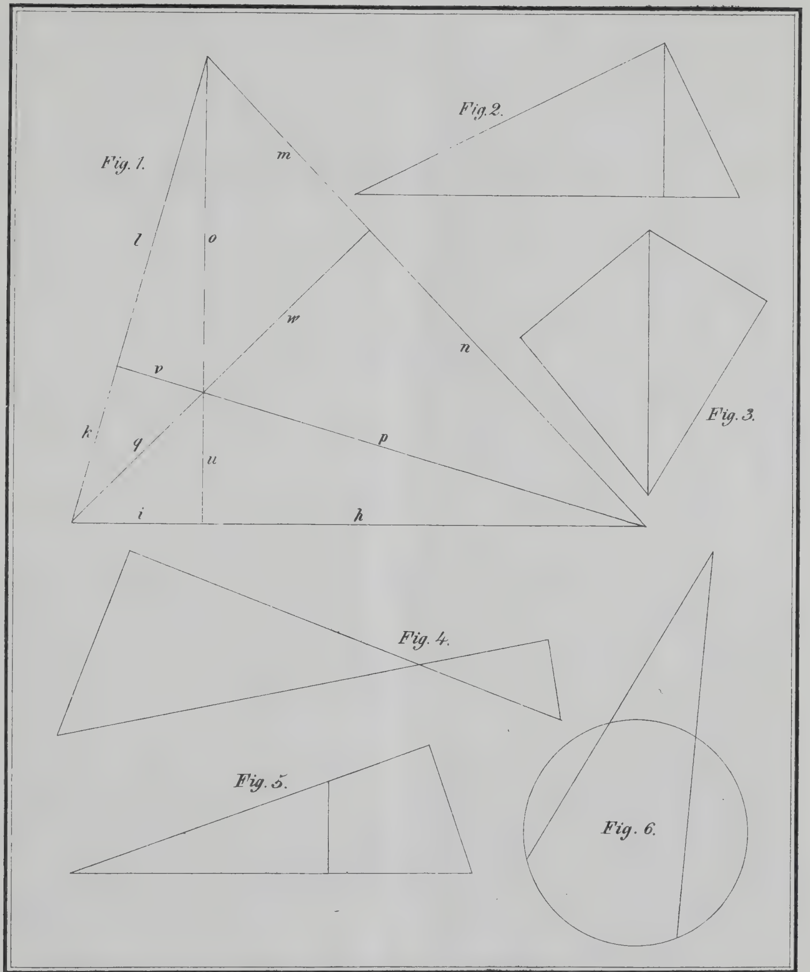
Wir eilen zum Schlusse unserer Abhandlung, welchen eine tabellarische Zusammenstellung von zusammengehörigen Zahlenwerthen der zwölf Segmente bilden möge. Diese Zusammenstellung ist aus rationalen Dreiecken, d. h. solchen, bei welchen sich gleichzeitig die drei Seiten und der Flächenraum rational ausdrücken lassen, entlehnt. Bei dergleichen Dreiecken nämlich fallen, wie sich leicht beweisen lässt, immer auch alle zwölf Segmente rational aus.

№	h i	k l	m n	o u	p v	q w
1.	9 5	$5\frac{5}{13}$ $7\frac{8}{13}$	$6\frac{3}{5}$ $8\frac{2}{5}$	$8\frac{1}{4}$ $3\frac{3}{4}$	$9\frac{3}{4}$ $3\frac{9}{52}$	$6\frac{1}{4}$ $4\frac{19}{20}$
2.	45 32	$36\frac{4}{17}$ $31\frac{13}{17}$	$28\frac{4}{5}$ $46\frac{1}{5}$	36 24	51 $16\frac{16}{17}$	40 $21\frac{3}{5}$
3.	25 32	$26\frac{14}{17}$ $41\frac{3}{17}$	$43\frac{1}{13}$ $21\frac{12}{13}$	$46\frac{2}{3}$ $13\frac{1}{3}$	$28\frac{1}{3}$ $21\frac{49}{51}$	$34\frac{2}{3}$ $17\frac{37}{39}$
4.	10 7	$4\frac{19}{25}$ $20\frac{6}{25}$	$19\frac{6}{13}$ $6\frac{7}{13}$	$21\frac{1}{12}$ $2\frac{11}{12}$	$10\frac{5}{12}$ $5\frac{271}{300}$	$7\frac{7}{12}$ $8\frac{17}{156}$
5.	64 35	$27\frac{18}{25}$ $97\frac{7}{25}$	$89\frac{7}{17}$ $46\frac{10}{17}$	$101\frac{1}{3}$ $18\frac{2}{3}$	$66\frac{2}{3}$ $28\frac{28}{75}$	$39\frac{2}{3}$ $47\frac{35}{51}$
6.	63 80	$98\frac{18}{29}$ $17\frac{11}{29}$	$19\frac{1}{5}$ $85\frac{4}{5}$	24 60	87 $16\frac{16}{29}$	100 $14\frac{2}{5}$
7.	35 80	$79\frac{9}{29}$ $36\frac{20}{29}$	$46\frac{10}{13}$ $44\frac{3}{13}$	$50\frac{2}{3}$ $33\frac{1}{3}$	$48\frac{1}{3}$ $34\frac{82}{87}$	$86\frac{2}{3}$ $19\frac{19}{39}$
8.	56 100	$107\frac{17}{29}$ $37\frac{12}{29}$	$45\frac{10}{17}$ $73\frac{7}{17}$	$51\frac{2}{3}$ $53\frac{1}{3}$	$77\frac{1}{3}$ $35\frac{55}{87}$	$113\frac{1}{3}$ $24\frac{16}{51}$
9.	49 160	$144\frac{4}{29}$ $87\frac{25}{29}$	$116\frac{12}{25}$ $58\frac{13}{25}$	$121\frac{1}{3}$ $46\frac{2}{3}$	$67\frac{2}{3}$ $83\frac{59}{87}$	$166\frac{2}{3}$ $33\frac{73}{75}$
10.	105 48	$49\frac{23}{37}$ $98\frac{14}{37}$	$83\frac{1}{5}$ $91\frac{4}{5}$	104 36	111 $33\frac{27}{37}$	60 $62\frac{2}{5}$

№	h	k	m	o	p	q
	i	l	n	u	v	w
11.	175	$103\frac{17}{37}$	$332\frac{4}{13}$	360	185	156
	144	$340\frac{20}{37}$	$122\frac{9}{13}$	60	$116\frac{28}{37}$	$138\frac{6}{13}$
12.	56	$29\frac{31}{37}$	$75\frac{12}{17}$	$85\frac{4}{5}$	$59\frac{1}{5}$	$40\frac{4}{5}$
	36	$81\frac{6}{37}$	$43\frac{5}{17}$	$19\frac{1}{5}$	$27\frac{153}{185}$	$40\frac{32}{85}$
13.	245	$172\frac{32}{37}$	$725\frac{19}{25}$	756	259	300
	288	$715\frac{5}{37}$	$149\frac{6}{25}$	84	$245\frac{7}{37}$	$211\frac{17}{25}$
14.	100	$44\frac{4}{37}$	$51\frac{6}{29}$	$70\frac{5}{7}$	$105\frac{5}{7}$	$49\frac{5}{7}$
	36	$66\frac{33}{37}$	$93\frac{23}{29}$	$34\frac{2}{7}$	$22\frac{242}{259}$	$48\frac{156}{203}$
15.	30	$8\frac{23}{41}$	$26\frac{3}{5}$	$33\frac{1}{4}$	$30\frac{3}{4}$	$11\frac{1}{4}$
	9	$32\frac{18}{41}$	$23\frac{2}{5}$	$6\frac{3}{4}$	$7\frac{49}{164}$	$19\frac{19}{20}$
16.	50	$16\frac{37}{41}$	$100\frac{5}{13}$	$108\frac{3}{4}$	$51\frac{1}{4}$	$29\frac{1}{4}$
	27	$106\frac{4}{41}$	$29\frac{8}{13}$	$11\frac{1}{4}$	$23\frac{143}{164}$	$41\frac{43}{52}$
17.	64	$19\frac{40}{41}$	$93\frac{3}{17}$	$105\frac{3}{5}$	$65\frac{3}{5}$	$30\frac{3}{5}$
	27	$103\frac{1}{41}$	$42\frac{14}{17}$	$14\frac{2}{5}$	$23\frac{37}{205}$	$49\frac{59}{85}$
18.	35	$13\frac{25}{41}$	$107\frac{16}{25}$	$112\frac{1}{8}$	$35\frac{7}{8}$	$28\frac{1}{8}$
	27	$109\frac{16}{41}$	$17\frac{9}{25}$	$7\frac{7}{8}$	$24\frac{201}{328}$	$31\frac{79}{200}$
19.	800	$217\frac{4}{41}$	$477\frac{27}{29}$	660	820	261
	189	$643\frac{37}{41}$	$682\frac{2}{29}$	180	$144\frac{36}{41}$	$455\frac{5}{29}$
20.	96	$34\frac{37}{41}$	$244\frac{16}{37}$	$258\frac{2}{5}$	$98\frac{2}{5}$	$66\frac{3}{5}$
	63	$252\frac{4}{41}$	$51\frac{21}{37}$	$21\frac{3}{5}$	$56\frac{148}{205}$	$83\frac{149}{185}$
21.	135	$130\frac{26}{53}$	$76\frac{4}{5}$	96	159	140
	112	$81\frac{27}{53}$	$148\frac{1}{5}$	84	$50\frac{38}{53}$	$57\frac{3}{5}$
22.	75	$98\frac{42}{53}$	$123\frac{1}{13}$	$133\frac{1}{3}$	$88\frac{1}{3}$	$121\frac{1}{3}$
	112	$113\frac{11}{53}$	$71\frac{12}{13}$	$46\frac{2}{3}$	$70\frac{70}{159}$	$51\frac{11}{39}$
23.	24	$27\frac{25}{53}$	$26\frac{9}{17}$	$30\frac{1}{15}$	$28\frac{4}{15}$	$31\frac{11}{15}$
	28	$25\frac{28}{53}$	$24\frac{8}{17}$	$14\frac{14}{15}$	$15\frac{703}{795}$	$14\frac{38}{255}$

№	h i	k l	m n	o u	p v	q w
24.	105	$173\frac{43}{53}$	$282\frac{22}{25}$	$294\frac{2}{3}$	$123\frac{2}{3}$	$233\frac{1}{3}$
	224	$250\frac{10}{53}$	$92\frac{3}{25}$	$65\frac{1}{3}$	$155\frac{107}{159}$	$82\frac{38}{75}$
25.	300	$362\frac{2}{53}$	$92\frac{27}{29}$	$128\frac{1}{3}$	$353\frac{1}{3}$	$270\frac{2}{3}$
	196	$108\frac{51}{53}$	$342\frac{2}{29}$	$186\frac{2}{3}$	$67\frac{127}{159}$	$88\frac{44}{87}$
26.	108	$160\frac{32}{53}$	$234\frac{15}{37}$	$247\frac{4}{5}$	$127\frac{1}{5}$	$207\frac{1}{5}$
	196	$210\frac{21}{53}$	$98\frac{22}{37}$	$67\frac{1}{5}$	$30\frac{242}{265}$	$80\frac{68}{185}$
27.	81	$161\frac{7}{53}$	$302\frac{2}{41}$	$309\frac{3}{5}$	$95\frac{2}{5}$	$229\frac{3}{5}$
	224	$262\frac{46}{53}$	$66\frac{39}{41}$	$50\frac{2}{5}$	$163\frac{149}{265}$	$67\frac{197}{205}$
28.	45	$10\frac{6}{61}$	$41\frac{2}{5}$	$51\frac{3}{4}$	$45\frac{3}{4}$	$13\frac{3}{4}$
	11	$50\frac{55}{61}$	$33\frac{3}{5}$	$8\frac{1}{4}$	$9\frac{81}{244}$	$31\frac{1}{20}$
29.	25	$6\frac{30}{61}$	$51\frac{2}{13}$	$55\frac{5}{12}$	$25\frac{5}{12}$	$11\frac{11}{12}$
	11	$54\frac{31}{61}$	$13\frac{11}{13}$	$4\frac{7}{12}$	$9\frac{727}{732}$	$21\frac{49}{156}$
30.	32	$7\frac{46}{61}$	$47\frac{13}{17}$	$54\frac{2}{15}$	$32\frac{8}{15}$	$12\frac{7}{15}$
	11	$53\frac{15}{61}$	$20\frac{4}{17}$	$5\frac{13}{15}$	$9\frac{697}{915}$	$25\frac{121}{255}$
31.	35	$10\frac{17}{61}$	$109\frac{1}{25}$	$113\frac{7}{12}$	$35\frac{7}{12}$	$22\frac{11}{12}$
	22	$111\frac{44}{61}$	$15\frac{24}{25}$	$6\frac{5}{12}$	$20\frac{353}{732}$	$31\frac{241}{300}$
32.	400	$86\frac{1}{61}$	$251\frac{1}{29}$	$346\frac{2}{3}$	$406\frac{2}{3}$	$106\frac{1}{3}$
	77	$340\frac{60}{61}$	$328\frac{28}{29}$	$73\frac{1}{3}$	$62\frac{94}{183}$	$239\frac{7}{87}$
33.	144	$39\frac{52}{61}$	$372\frac{12}{37}$	$393\frac{3}{5}$	$146\frac{2}{5}$	$81\frac{2}{5}$
	77	$387\frac{9}{61}$	$71\frac{25}{37}$	$26\frac{2}{5}$	$70\frac{298}{305}$	$127\frac{121}{185}$
34.	27	$8\frac{51}{61}$	$112\frac{10}{41}$	$115\frac{1}{20}$	$27\frac{9}{20}$	$22\frac{11}{20}$
	22	$113\frac{10}{61}$	$10\frac{31}{41}$	$4\frac{19}{20}$	$20\frac{911}{1220}$	$25\frac{209}{820}$
35.	112	$26\frac{9}{61}$	$135\frac{21}{53}$	$159\frac{7}{15}$	$113\frac{13}{15}$	$38\frac{13}{15}$
	33	$156\frac{52}{61}$	$76\frac{32}{53}$	$20\frac{8}{15}$	$28\frac{692}{915}$	$84\frac{196}{795}$
36.	189	$62\frac{18}{65}$	$163\frac{1}{5}$	204	195	80
	64	$197\frac{47}{65}$	$151\frac{4}{5}$	48	$50\frac{14}{65}$	$122\frac{2}{5}$

№	*h* / *i*	*k* / *l*	*m* / *n*	*o* / *u*	*p* / *v*	*q* / *w*
37.	105	$41\frac{3}{5}$	208	$225\frac{1}{3}$	$108\frac{1}{3}$	$69\frac{1}{3}$
	64	$218\frac{2}{5}$	65	$26\frac{2}{3}$	$55\frac{7}{15}$	$86\frac{2}{3}$
38.	168	$61\frac{3}{65}$	$240\frac{5}{17}$	$272\frac{1}{3}$	$173\frac{1}{3}$	$90\frac{2}{3}$
	80	$263\frac{62}{65}$	$116\frac{12}{17}$	$42\frac{2}{3}$	$67\frac{7}{195}$	$128\frac{8}{51}$
39.	$29\frac{2}{5}$	$13\frac{7}{13}$	$89\frac{3}{5}$	$93\frac{1}{3}$	$30\frac{1}{3}$	$26\frac{2}{3}$
	$25\frac{3}{5}$	$90\frac{16}{13}$	$15\frac{2}{5}$	$7\frac{7}{15}$	$22\frac{38}{39}$	$26\frac{2}{15}$
40.	60	$18\frac{46}{65}$	$34\frac{17}{29}$	$47\frac{16}{21}$	$61\frac{19}{21}$	$22\frac{2}{21}$
	16	$46\frac{19}{65}$	$52\frac{12}{29}$	$15\frac{5}{21}$	$11\frac{1033}{1365}$	$32\frac{572}{609}$
41.	108	$46\frac{17}{65}$	$272\frac{1}{37}$	$287\frac{4}{7}$	$111\frac{3}{7}$	$84\frac{4}{7}$
	80	$278\frac{47}{65}$	$60\frac{36}{37}$	$27\frac{3}{7}$	$70\frac{358}{455}$	$93\frac{69}{259}$
42.	448	$478\frac{49}{65}$	$508\frac{4}{17}$	576	520	561
	495	$496\frac{16}{65}$	$443\frac{13}{17}$	264	$292\frac{28}{65}$	$271\frac{1}{17}$
43.	49	$75\frac{9}{65}$	$133\frac{14}{25}$	$139\frac{1}{8}$	$56\frac{7}{8}$	$103\frac{1}{8}$
	99	$119\frac{56}{65}$	$41\frac{11}{25}$	$28\frac{7}{8}$	$70\frac{329}{520}$	$38\frac{191}{200}$
44.	160	$131\frac{32}{65}$	$53\frac{11}{29}$	$73\frac{5}{7}$	$185\frac{5}{7}$	$136\frac{5}{7}$
	99	$63\frac{33}{65}$	$178\frac{18}{29}$	$94\frac{2}{7}$	$37\frac{193}{455}$	$50\frac{170}{203}$
45.	96	$132\frac{33}{65}$	$211\frac{13}{37}$	$223\frac{3}{7}$	$111\frac{3}{7}$	$174\frac{3}{7}$
	165	$192\frac{32}{65}$	$84\frac{24}{37}$	$56\frac{4}{7}$	$113\frac{197}{455}$	$72\frac{120}{259}$
46.	$25\frac{3}{5}$	$43\frac{2}{13}$	$83\frac{1}{13}$	$85\frac{5}{7}$	$29\frac{5}{7}$	$61\frac{2}{7}$
	$59\frac{2}{5}$	$73\frac{11}{13}$	$20\frac{12}{13}$	$15\frac{3}{35}$	$43\frac{47}{91}$	$21\frac{9}{91}$



Lith. Anst. v. Th. Fischer, Cassel.

Schulnachrichten.

I. Lehrverfassung

während des Schuljahres von Ostern 1855 bis ebendahin 1856.

Prima.

(Ordinarius: Director Dr. *Münscher.*)

Griechische Sprache. Homers Ilias. B. XVIII u. XIX (Sommer), B. XX u. XXI (Winter); 1 Stunde wöchentlich (Director Dr. *Münscher*); Sophokles König Oedipus bis zum Schluss; 2 St. w. seit Pfingsten. (BL. Dr. *Buchenau*); Demosthenes Rede vom Kranz §. 1—125 (S.)› §. 126—290 (W.) 2 St. w. (Director Dr. *Münscher*); Scripta nach Frankes 3. Cursus nebst Wiederholung der Lehre von den Modi n. Buttmann. 1 St. w.; im S. Dir. Dr. *Münscher*; im W. Dr. *Collmann.*

Lateinische Sprache. Horazens Episteln B. I. 1. 2. 7. 10. B. II. 1 u. 3. V. 1—274 (S. seit Ende Juli); Satiren B. I. mit Auslassung von 2. 7. 8, B. II, 1—6 (W.) 3 St. w. (Dr. *Fuldner*); Ciceros Brutus Cap. 1—20 (S.); 21—38 (W.) 2 St. w.; Scripta nach Süpfles Aufgaben für obere Classen II. Nr. 89—208 (S.); Nr. 209—228 (W.) 1 St. w. (Dr. *Soldan*); Cicero de natura Deorum B. I. Cap. 1—7. 16—30 (S.); B. II. Cap. 1—8. 17—34. 62—67 (W.) 2 St. w.; Lateinische Aufsätze im erzählenden Stil nach Livius (S.); im Redestil nach Cicero (W.) 1 St. w. (Dir. Dr. *Münscher*).

Deutsche Sprache. Literaturgeschichte von Anf. bis auf Gottsched (S.) 3 St.; von da bis z. Schluss (W.) 2 St.; Aufsätze u. Declamations-Uebungen (S. u. W.) 1 St. (Pf. *Dithmar*).

Französische Sprache. Le Misanthrope par Molière (S.); le Cid par Corneille (W.); Grammatik und schriftliche Uebungen nach des Lehrers Grammatik und dessen Uebungsbuche 2. Curs. 2 St. w. (Dr. *Collmann*).

Hebräische Sprache. Grammatik nach Gesenius von Anfang bis zum regelmässigen Verbum einschl. (S. von Pfingsten an); das Wichtigste vom unregelmässigen Verbum (W.) 1 St.; Erklärung ausgewählter Stücke der Genesis 1 St. (BL. Dr. *Buchenau*).

Religionslehre. Geschichte der christlichen Kirche von Constantin d. Gr. bis auf Luther (S.); Vollendung der Kirchengeschichte, sodann Symbolik nach Schmieder (W.) 2 St. (Dir. Dr. *Münscher*).

Weltgeschichte. Römische Geschichte von dem Ende des Königthums bis zum Ende des Kaiserthums; sodann Uebersicht über das Mittelalter (S.) 2 St.; neuere Geschichte, von der Reformation bis auf die Deutschen Freiheitskriege (W.) 3 St. nach Dittmar (Dir. Dr. *Münscher*).

Mathematik. Geometrische Aufgaben nach Wöckel Abschnitt 4 u. 5; Trigonometrie nach Stegmann Cap. 2 u. 3; Wiederholung der arithmetischen Lehren nach Hartmann (S.) 4 St. (Dr. *Grebe*); Stereometrie nach Stegmann §. 1—27; Wiederholung der Gleichungen des 1. Grades; sodann Gleichungen des 2. Grades mit Uebungen nach Heis §. 61—71 (W. seit Neujahr) 4 St. (HL. *Fürstenau*).

Physik. Electricität und Magnetismus nach Eisenlohr VII u. VIII (S.); mechanische Eigenschaften der Körper nach Eisenlohr III. B. C. N. (W.) 2 St. w. (Dr. *Ritter*).

Secunda.

(Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. *Soldan.*)

Griechische Sprache. Odyssee B. XX, 290 bis XXII, 40 (S.); weiter bis XXIII zu Ende (W.) 2 St. w. (Dr. *Weber*); Xenophons Anabas. B. V, 1 bis V, 6 (S.); weiter bis VI, 5 (W.) 2 St.; Grammatik nach Buttmann §. 139—142 (S.) §. 143—149 (W.) 1 St.; Scripta nach Frankes 1. u. 2. Curs. 1 St. (bis Pfingsten Dr. *Collmann*, sodann BL. *Schimmelpfeng*).

Lateinische Sprache. Virgils Aeneide B. III, 120 bis IV, 198 (S.) 2 St. (seit Pfingsten Dr. *Collmann*); B. IV, 198—583 (W.) 2 St. (Dr. *Soldan*, dann Dr. *Fuldner*); Ciceros Reden für Ligarius und für Deiotarus (S.); für Milo Cap. 1—16 (W.) 2 St. w.; Livius B. XXXIII, 1—16. 21—24. 30—36. 38—42. 45—49 (S.); B. XXXIV, 59—62. XXXV, 1—5. 12—20. 42—51. XXXVI, 1—7. 3 St. w.; Grammatik nach Zumpt §. 517—602 (S.); §. 603—641; 655—671. 2 St. w.; Scripta nach Süpfle für obere Classen II. Nr. 104—123 (S.); Nr. 124—137 (W.) 1 St. w. (Dr. *Soldan*).

Deutsche Sprache. Lesen und Erklären Deutscher Gedichte nach Wackernagels Auswahl 1. Abschnitt Nr. 1—36 (S.); Nr. 37—89 (W.) 1 St.; Aufsätze und Declamationsübungen 1 St. w. (Dr. *Weber*).

Französische Sprache. Lectüre nach des Lehrers Lesebuche von Anfang bis Seite 50 nebst einigen Poesien. Grammatik und schriftliche Uebungen nach des Lehrers Grammatik und Uebungsbuch 1. Curs. (Dr. *Collmann*).

Religionslehre. Erklärung des Evangeliums von Matthaeus Cap. 1—20, sowie der eigenthümlichen Gleichnisse bei Lukas (S.); das Evangelium von Johannes, mit Einschaltung der Kapitel 21—26 von Matthaeus (W.) 2 St. w. (Dir. Dr. *Münscher*).

Weltgeschichte nach Dittmar. Die Zeit nach Christus bis 600 (S.); bis 843 mit Wiederholung von 476 an (W.) 2 St. (Dr. *Weber*).

Geographie. Mathematische Geographie; Ethnographie von Australien und Amerika (S.); von Afrika und Asien (W.) nach des Lehrers Lehrbuche. 2 St. w. (Dr. *Ritter*).

Mathematik. Geometrische Aufgaben nach Wöckel Abschn. 2. 3. 4. Arithmetik nach Hartmann von Anfang (S.) 4 St. (Dr. *Grebe*); Wiederholung der ebnen Geometrie mit Uebungen im Auffinden von Beweisen; Wiederholung der Gesetze der Multiplication und Division mit Uebungen nach Heis. (W.) 4 St. (HL. *Fürstenau*).

Naturgeschichte. Uebersicht und Wiederholung der drei Naturreiche (S.); Gesteinslehre (W.) 1 St. w. (Dr. *Ritter*).

Tertia.

(Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. *Collmann*).

Griechische Sprache. Homers Odyssee B. IX. 2 St. (Dr. *Collmann*). Xenophons Anabasis B. I, 9 bis II, 1 (S.); bis II, 5 (W.) 2 St.; Grammatik nach Buttmann, Wiederholung der regelmässigen Verba und der Verba auf μι §. 101—107 (S.); Verba anomala §. 108—114 (W.) 1 St.; Scripta nach Franke, Pronomina (S.); regelmässiges Zeitwort, Future und Aoriste (W.) 1 St. (BL. *Schimmelpfeng*).

Lateinische Sprache. Ovids Metamorphosen B. XII, 527—625; XIII, 1—122 (S.); B. XIII, 123—415 (W.) 2 St. (Dr. *Soldan*); Caesar de bello Gallico B. III, 10 bis V. zu Ende (S. u. W.) 4 St.; Grammatik nach Zumpt, die Casus, Tempora und Modi bis Conjunct. einschliesslich (S. u. W.) 2 St.; Scripta nach Süpfle 1. Cursus. 1 St. w. (Dr. *Collmann*).

Deutsche Sprache. Lesen und Auswendiglernen nach Bachs Lesebuche, epische, lyrische und prosaische Stücke. 1 St.; Aufsätze. 1 St. (BL. *Schimmelpfeng*).

Französische Sprache. Nach des Lehrers Vorschule 2. Cursus. 3 St. w. (Dr. *Collmann*).

Religionslehre. Geschichte des Alten Bundes von 1 Mose 1 bis zum Buche Ruth (S. u. W.) 2 St. (Pf. *Fenner*).

Weltgeschichte. Morgenländische und Griechische Geschichte nach Dittmar bis zu den Perserkriegen (S.); von da bis zum Tode Alexanders d. G. (W.) 2 St. (BL. *Schimmelpfeng*).

Geographie. Mathematische Geographie, sodann Bodengepräge und Naturverhältnisse von Australien und Amerika (S.); von Afrika und Asien (W.) 2 St. (Dr. *Ritter*).

Mathematik. Geometrie nach Sadebeck §. 1—113; Arithmetik, Rechnungen des gemeinen Lebens nach Fölsing 2. Theil. Kap. 7. nebst den Anfangsgründen der Buchstabenrechnung (S.) 4 St. (Dr. *Grebe*); Wiederholung der ebenen Geometrie nach Sadebeck v. Anf. nebst Aufgaben; Arithmetik, leichtere Gleichungen mit *einer* Unbekannten nebst Uebungen nach Fölsing. 2. Theil. Kap. 7 u. 8. 4 St. w. (HL. *Fürstenau*).

Naturgeschichte. Gliederthiere (S.); Amphibien und Fische (W.) 1 St. (Dr. *Ritter*).

Schönschreiben. Im Sommer 1 St. w. (Conrector *Kutsch*).

Quarta.

(Ordinarius: Gymnasiallehrer Pfarrer *Dithmar*.)

Griechische Sprache. Grammatik nach Buttmann, Wiederholung der Declination, sodann Conjugation mit Einschluss der Verba auf μι; Lectüre in Jacobs Elementarbuch 1. Curs. III—X; Scripta nach Hess. 4 St. w. (Pf. *Dithmar*).

Lateinische Sprache. Fabeln des Phaedrus B. III—IV, 9 (S.); bis B. V. zu Ende (W.) 2 St. w. (BL. *Schimmelpfeng*); Cornelius Nepos von Epaminondas bis Hannibal einschl. 4 St. w.; Grammatik nach Putsche, die Syntax bis zu Ende; dazu entsprechende Scripta nach Spiess Anleitung für Quarta. 3 St. w. (Pf. *Dithmar*).

Deutsche Sprache. Lesen und Auswendiglernen nach Bachs Lesebuche von Anfang bis zu Ende mit Auswahl, sowie Aufsätze. 2 St. w. (Pf. *Fenner*).

Religionslehre. Wiederholung der biblischen Geschichte Alten und Neuen Bundes nach Löhr, neu bearbeitet von dem Lehrer (S.); Erklärung des Hessischen Katechismus und Darstellung des christlichen Kirchenjahrs. (W.) 2 St. (Pf. *Dithmar*).

Weltgeschichte in chronologischer Uebersicht nach Kohlrauschs Tabellen 1—5. Zeitraum (S.); 6—9. Zeitraum mit Wiederholung des Frühern (W.) 2 St. w. (BL. *Schimmelpfeng*).

Geographie. Elemente der mathematischen Geographie, dann Australien und Amerika nach ihren räumlichen Verhältnissen (S.) ebenso Asien und Afrika (W.) nach des Lehrers Lehrbuche. 2 St. w. (Dr. *Ritter*).

Mathematik. Geometrischer Vorbereitungs-Unterricht mit Benutzung von Sadebeck; Arithmetik, Rechnungen des gemeinen Lebens nach Fölsing 2. Theil v. Anf. (S.) 4 St. (Dr.

Grebe); Fortsetzung des geometrischen Unterrichts; in der Arithmetik Wiederholung der Bruchrechnung und Decimalbrüche (W.) 4 St. (HL. *Fürstenau*).

Naturgeschichte. Vögel (S.); Säugethiere (W.) nach Schwaabs Leitfaden. 2 St. (Dr. *Ritter*).

Schönschreiben. 2 St. (Conr. *Kutsch*).

Quinta.

(Ordinarius: Beauftragter Lehrer Dr. *Buchenau.*)

Griechische Sprache. Grammatik nach Buttmann (Substantiva, Adjectiva, Numeralia, Pronomina, Auswahl aus §. 34—80); Lectüre der entsprechenden Stücke aus Jacobs Elementarbuch I—V. 2 St. w. (Dr. *Buchenau*).

Lateinische Sprache. Grammatik nach Putsche, Wiederholung der Formenlehre (S.); Anfänge der Syntax im Anschluss an das Uebungsbuch von Spiess (W.); Lectüre und schriftliche Uebungen nach Spiess Uebungsbuch für Quinta. 9 St. w. (Dr. *Buchenau*).

Deutsche Sprache. Lesen und Auswendiglernen nach Bachs Lesebuche. 2 St.; Aufsätze. 1 St.; Uebungen in der Satzbildung und Rechtschreibung. 1 St. (Dr. *Buchenau*).

Religionslehre. Biblische Geschichten des Neuen Bundes nach Löhr. Nr. 1—53 (S.); 54—92 (W.) 2 St. w. (Pf. *Fenner*).

Weltgeschichte. Biographieen aus dem Mittelalter und aus der neueren Zeit nach Seemann Nr. 45—82. 2 St. w. (Pf. *Fenner*).

Geographie. Elemente der mathemat. Geographie; räumliche Verhältnisse von Australien und Amerika (S.); von Afrika und Asien (W.) nach des Lehrers Lehrbuche. 2 St. (Dr. *Ritter*).

Mathematik. Bruchrechnung nach Fölsing 1. Theil. 3. Abschn. v. Anf. (S.) 3 St. (Dr. *Grebe*); Wiederholung und Beendigung der Bruchrechnung nach Fölsing 1. Theil. Kap. 13. 14. 15. (W.) 3 St. w. (HL. *Fürstenau*).

Naturgeschichte. Anfangsgründe der Botanik (S.); Beschreibung und Vergleichung einheimischer bekannter Wirbelthiere (W.) 1 St. (Dr. *Ritter*).

Schönschreiben. 3 St. (Conr. *Kutsch*).

Sexta.

(Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. *Weber.*)

Lateinische Sprache. Grammatik nach Putsche, die regelmässigen Formen (S.); die unregelmässigen mit Wiederholung der regelmässigen (W.) 6 St.; schriftliche und mündliche

Uebungen nach Spiess Anleitung für Sexta Kap. 1—13 (S.); von 14—21 mit Wiederholung von 1—13 (W.) 4 St. (Dr. *Weber*).

Deutsche Sprache. Lesen und Auswendiglernen nach Bachs Lesebuche. 2 St.; Aufsätze. 1 St.; Uebungen in der Rechtschreibung und Satzbildung. 1 St. (Pf. *Fenner*).

Religionslehre. Biblische Geschichten des Alten Bundes nach Löhr Nr. 1—70 (S. u. W.) 2 St. (Pf. *Fenner*).

Weltgeschichte. Biographieen nach Seemann aus der Griechischen Geschichte Nr. 8—24 (S.); aus der Römischen Nr. 25—44 (W.) 2 St. (Pf. *Fenner*).

Geographie. Elemente der mathematischen Geographie, dann Australien und Amerika übersichtlich (S.); Afrika, Asien und Europa übersichtlich (W.) 2 St. (Dr. *Ritter*).

Mathematik. Die vier Species mit ganzen Zahlen nach Fölsing 1. Th. 1. u. 2. Abschn. nebst Uebungen im Kopfrechnen (S. u. W.) 3 St. (BL. *Schimmelpfeng*).

Naturgeschichte. Anfangsgründe der Botanik (S.); Beschreibung und Vergleichung einheimischer bekannter Wirbelthiere (W.) 1 St. (Dr. *Ritter*).

Schönschreiben. 3 St. (Conr. *Kutsch*).

Religionsunterricht für die Schüler katholischer Confession. Für die Schüler der vier unteren Classen: Glaubenslehre nach dem Mainzer Diöcesan-Katechismus — Einleitung, erstes Hauptstück vom Glauben, apostolisches Glaubensbekenntnis, erster Artikel: Gott und seine Eigenschaften bis zum Geheimnis der allerheiligsten Dreifaltigkeit — mit kurzer Wiederholung und Fortsetzung der biblischen Geschichte bis zum Propheten Daniel (S.); Schöpfung, erste Sünde bis zur »Vorbereitung zum öffentlichen Leben Jesu»; in der Geschichte des Alten Bundes die kleinen Propheten (W.) 2 St.

Für die Schüler der zwei oberen Classen: Göttlichkeit der christlichen Offenbarung, Lehre von der Kirche, Geschichte der Kirche bis auf Constantin d. Gr. (S.); Fortsetzung bis zur Ausbreitung des Christenthums in Deutschland besonders durch den heiligen Bonifacius (W.) 1 St. (Pf. *Will*).

Gesang. I. Abtheilung. Chöre aus dem Oratorium Paulus, von Mendelssohn-Bartholdy; vierstimmige Lieder von demselben und anderen Componisten, sowie aus dem Sängerhain von Fr. und L. Erk und W. Greef 2. und 3. Heft; vierstimmige Choräle (rythmisch); Lieder für vierstimmigen Männergesang. 1 St.

II. Abtheilung. Rythmische und melodische Uebungen: Lehre von den Tonarten; Lieder aus dem Sängerhain 1. Heft. 1 St.

Choralgesang nach dem kleinen evangelischen Gesangbuche für Prima und Secunda 1 St.; für Tertia und Quarta 1 St.

III. Abtheilung. Elemente des Gesanges; Lieder aus dem »Sängerhain» 1. Heft, sowie andere leichte Gesänge; Choralgesang nach dem kleinen evangelischen Gesangbuche. 1 St. (Gesanglehrer *Peter*).

Leibesübungen im Sommer. Drei Abtheilungen, für jede 2 St. wöchentlich (Gesanglehrer *Peter*); ausserdem Unterricht und Uebung im Schwimmen.

II. Chronik des Gymnasiums.

Das Schuljahr wurde Dienstag den 17. April mit einer gemeinsamen Andacht der Lehrer und Schüler sowie mit feierlicher Aufnahme der neuen Schüler begonnen.

Zum Ersatz für den zum Pfarrer in Friedewald bestellten Dr. *Hupfeld* wurde durch Beschluss Kurfürstlichen Ministeriums des Inneren vom 16. Mai v. J. der bisher am Gymnasium zu Kassel beauftragte Dr. *Buchenau* dem hiesigen Gymnasium zugewiesen, wo er seine Thätigkeit am 21. Mai begann. Eine solche Aushülfe war um so willkommner, als Dr. *Fuldner* durch lange anhaltende Krankheit verhindert war, die ihm übertragenen Lectionen zu geben.

Am 5. Juni fand zur elfhundertjährigen Gedächtnisfeier des Angelsachsen *Bonifacius*, des Begründers der christlichen Kirche und Schule in Deutschland, im grossen Hörsaale des Gymnasiums ein öffentlicher Rede-Act Statt. Der Primaner *Adolf Heldmann* von Niederasphe sprach über: die Einwirkung des Christenthums auf das germanische Ritterthum; der Primaner *Ferdinand Justi* von Marburg sprach über: Deutsches Volksleben nach der Verbreitung des Christenthums. Die Schlussrede des Directors handelte von der Bedeutung des Bonifacius für die Bewohner hiesiger Gegend, wo Bonifacius auf Amöneburg das erste Gotteshaus gegründet hat. Nachmittags wurde von Lehrern und Schülern ein gemeinsamer Spaziergang nach dem Elisabethbrunnen im Angesicht der Amöneburg gemacht.

Nach dem Schluss des Sommerhalbjahrs wurde durch Kurfürstliches Ministerium des Innern ein Allerhöchstes Rescript vom 13. September v. J. mitgetheilt, durch welches der Gymnasiallehrer

Dr. *Grebe* dahier als erster Lehrer der Realschule zu Kassel unter Beauftragung desselben mit dem Rectorate der gedachten Anstalt bestätigt wurde. In Folge dieser Ernennung schied Dr. *Grebe* noch vor dem Beginn des Winterhalbjahrs aus dem hiesigen Gymnasium, um welches er sich durch seinen mathematischen Unterricht während einer nur zweijährigen Wirksamkeit grosse Verdienste erworben hat. Als sein letztes Wort für das Gymnasium ist die diesen Nachrichten vorgedruckte Abhandlung zu betrachten, welche er bereits vor seinem Abgang für das diessjährige Programm verfasst hatte.

Zum Ersatz für diesen Verlust wurde durch Allerhöchstes Rescript vom 2. November v. J. der Gymnasialpracticant *Eduard Fürstenau* aus Rinteln zum Hülfslehrer an dem Gymnasium dahier allergnädigst bestellt. Durch einen mehrwöchigen Urlaub des genannten Lehrers, dessen Thätigkeit an der Blochmannschen Lehranstalt zu Dresden nicht sogleich ersetzt werden konnte, sowie durch das diessmal besonders frühzeitige Eintreten der Weihnachtsferien wurde es veranlasst, dass die mathematischen Lectionen am hiesigen Gymnasium in den fünf oberen Klassen ein Vierteljahr lang ausfielen und grossentheils durch andere Lectionen ersetzt wurden. Denn erst am 3. Januar d. J. begann HL. *Fürstenau* seine Thätigkeit am Gymnasium. Aber dies war nur der geringere Nachtheil, durch welchen das Gymnasium im verflossenen Winter gelitten hat. Am Ende des October brach nämlich dahier eine Nervenfieber-Epidemie aus, ergriff bald auch viele Schüler des Gymnasiums und nahm einen aus unserer Mitte hinweg. In Folge davon wurden vom 25. November an und weiter die meisten auswärtigen Schüler auf Bitten ihrer Eltern in die Heimath entlassen. Erst auf eine in den öffentlichen Blättern am 17. Januar von dem Unterzeichneten erlassene Ankündigung, dass die eigentliche Epidemie aufgehört habe, kehrten die meisten nach fast zweimonatlicher Unterbrechung zu der gewohnten Beschäftigung zurück. Von den Ausbleibenden waren manche noch krank, andere hatten sich anderen Lehranstalten zugewendet, zwei — waren in der Heimath gestorben. Indess waren die Lectionen des Gymnasiums bis zum 12. December v. J. fortgesetzt worden, an welchem Tag mit Genehmigung Kurf. Ministeriums des Inneren die Weihnachtsferien ihren Anfang nahmen. Am 3. Januar d. J. wurden die Lectionen wieder begonnen, jedoch in der Weise, dass bis zum 28. Januar nur während des Vormittags Unterricht ertheilt wurde. Erst mit dem letztgenannten Tage, gerade drei Monate seit dem Tage, an welchem der erste Gymnasiast vom Nervenfieber ergriffen wurde, trat am Gymnasium die regelmässige Ordnung wieder ein und wurde Gott sei Dank! seitdem nicht mehr gestört. Bei diesem Rückblick auf so manchen schmerzlichen Verlust glaube ich auch das anführen zu müssen, dass Dr. *Hupfeld*, der erst am 31. Januar 1855 von unserer Anstalt geschieden war, am 16. Februar 1856 zu Friedewald, ebenfalls vom Nervenfieber ergriffen, das Ziel seiner Wirksamkeit erreicht hat.

Allgemeine Verfügungen in Betreff der Gymnasien sind von Seiten der vorgesetzten Behörde während des verflossenen Schuljahrs nicht ergangen.

Die Bibliothek des Gymnasiums ist aus Staatsmitteln in herkömmlicher Weise ergänzt worden. Von Privatpersonen erhielt sie folgende Geschenke:

Herr Buchhändler Ehrhardt dahier beschenkte dieselbe mit: Erasmi colloquia; Herr Lithograph Koch dahier mit einem Werke seines Verlags: Lilienfelds Reise um die Welt; Herr Buchhändler Elwert dahier mit folgenden Werken seines Verlags: Dietrichs sidonische Inschrift; Vorländer über Moral und Rechtslehre der Engländer und Franzosen; Heppe die confessionelle Entwicklung der protestantischen Kirche; desselben Geschichte des deutschen Protestantismus 1. und 2. Band; Mittlers Deutsche Volkslieder 1. bis 4. Lieferung; Vilmars Schulreden 2. Auflage; Eberts Handbuch der italienischen Nationalliteratur. — Für diese Gaben wird hiermit der gebürende Dank abgestattet.

III. Statistische Uebersicht.

Bei dem Beginn des Schuljahres betrug die Zahl sämmtlicher Schüler 182, darunter 87 auswärtige. Der Prima gehörten 31, der Secunda 37, der Tertia 45, der Quarta 25, der Quinta 22 und der Sexta ebenfalls 22 an.

Am Schlusse des Sommerhalbjahres den 18. September wurde der Primaner *Wilhelm Scheffer* aus Marburg, 20 Jahr alt, $11\frac{1}{2}$ Jahr im Gymnasium, $2\frac{1}{2}$ Jahr in Prima, mit dem Zeugnisse: *befähigt für die akademischen Studien* entlassen. — Ausserdem unterzogen sich der Prüfung der Reife die Studierenden *Karl Sallmann* aus Kassel, $18\frac{1}{2}$ Jahr alt, und *Gustav Eduard Reinmüller* aus Kassel, 21 Jahr alt, von welchen der erstere das Prädicat: *sehr gut vorbereitet*, der letztere das Prädicat: *gut vorbereitet für die akademischen Studien* erhielt.

Ferner verliessen im Laufe des Schuljahres drei und dreissig Schüler das Gymnasium, ohne den Cursus desselben vollendet zu haben. Aus Prima gingen vier ab (drei um sich privatim fortzubilden, einer wurde in der Stille ausgewiesen), fünf aus Secunda (zwei um sich dem Militärstand zu widmen, einer um Forstmann zu werden, einer um sich durch Privatstudium fortzubilden, einer wurde in der Stille ausgewiesen), zwölf aus Tertia (zwei um sich dem Kaufmannsstand zu widmen, zwei um auf das Gymnasium zu Corbach, einer um auf das

Gymnasium zu Hanau, einer um auf die Realschule zu Hanau, einer um auf das Gymnasium zu Bielefeld, einer um auf das Gymnasium zu Kassel, einer um auf die hiesige Realschule überzugehen, zwei um sich einem nichtwissenschaftlichen Beruf zu widmen, einer um sich privatim unterrichten zu lassen), vier aus Quarta (zwei um auf die hiesige Realschule, einer um auf eine polytechnische Schule im Grossherzogthum Hessen überzugehen, einer um Apotheker zu werden), vier aus Quinta (zwei um auf das Gymnasium zu Kassel zu gehn, einer um privatim unterrichtet zu werden, einer um sich zum Kaufmannsstand vorzubereiten), vier aus Sexta (drei ohne Bestimmung, einer wurde in der Stille ausgewiesen).

Ausserdem verlor das Gymnasium, wie schon erwähnt ist, drei hoffnungsvolle Schüler durch den Tod. Der Primaner *Eduard Theys* von Jesberg starb den 24. December v. J. in seiner Heimath. Der Secundaner *Friedrich Henke* aus Marburg starb dahier den 23. Nov. v. J. Die Beerdigung, an welcher die Lehrer und Schüler des Gymnasiums Theil nahmen, fand am 26. Statt. Der Tertianer *Wilhelm Wittekindt* aus Treysa starb den 25. December in seiner Heimath.

Am Schlusse des Schuljahrs werden zur Universität entlassen werden die Primaner:

1) *Adolf Ferdinand Heinrich Leander Heldmann* aus Niederasphe, 19¼ Jahr alt, 8½ Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima; wird Jurisprudenz studieren.

2) *Hermann Friedrich Heinrich Siebert* aus Obergrenzebach bei Ziegenhain, 18¼ Jahr alt, 5 Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima; widmet sich dem Studium der Theologie.

3) *Eduard Georg Wilhelm Amelung* aus Fronhausen, 19 Jahr alt, 7 Jahr im Gymnasium, 2½ Jahr in Prima; wird Jurisprudenz studieren.

4) *Ferdinand Wilhelm Jacob Justi* aus Marburg, 18¾ Jahr alt, 10 Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima; wird Philologie studieren.

5) *Karl Georg Gleim* aus Sachsenhausen bei Treysa, 17¾ Jahr alt, 9 Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima; wird Medicin studieren.

6) *Rudolf Nasse* aus Marburg, 18¾ Jahr alt, 11 Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima; wird Naturwissenschaften studieren.

7) *Karl Wilhelm Ludwig Stadler* aus Marburg, 19 Jahr alt, 4½ Jahr im Gymnasium, 2 Jahr in Prima; widmet sich dem Studium der Medicin.

Von den Geprüften erhielt *Justi* das Prädicat: *ziemlich gut vorbereitet*, *Amelung* das Prädicat: *befähigt*, die Uebrigen das Prädicat: *gut vorbereitet für die akademischen Studien.*

IV. Ordnung der öffentlichen Prüfung.

Montag den 17. Merz.

Vormittags.

Choralgesang.

Von 9—11 Uhr: *Prima.* Demosthenes. Physik. Horaz. Französisch.

Von 11—12 Uhr: *Sexta.* Lateinisch. Geschichte.

Nachmittags.

Von 2—4 Uhr: *Quarta.* Griechisch. Geographie. Phaedrus. Arithmetik.

Dienstag den 18. Merz.

Vormittags.

Von 8—10 Uhr: *Secunda.* Livius. Deutsch. Xenophons Anabasis. Geometrie.

Von 10—11½ Uhr: *Quinta.* Religionslehre. Lateinisch. Naturkunde.

Nachmittags.

Von 2—4 Uhr: *Tertia.* Homers Odyssee. Geschichte. Ovids Metamorphosen. Geographie.

Mittewoche den 19. Merz.

Vormittags von 9 Uhr an.

Choralgesang (Allein zu Dir, Herr Jesu Christ).

Deutsche Rede des Abiturienten *Nasse.*

Gesang (Abschied vom Wald, in Musik gesetzt von Mendelssohn-Bartholdy).

Deutsche Rede des Abiturienten *Justi.*

Gesang (Abendlied von Goethe, in Musik gesetzt von Friedr. Kuhlau).

Lateinische Rede des Abiturienten *Heldmann.*

Gesang (Integer vitae etc., in Musik gesetzt von Flemming).

Entlassung der Abiturienten.

Choralgesang (Wachet auf).

Verkündigung der Versetzungen und Austheilung der Zeugnisse.

Der Gymnasialdirector
Münscher.

Zur Nachricht.

Die Lectionen des bevorstehenden Schuljahres beginnen Dienstag den 8. April. Neu zugehende Schüler sind bis zum 29. Merz unter Vorlegung ihrer Geburtsscheine und bisherigen Schulzeugnisse bei dem Director des Gymnasiums anzumelden. Die Prüfung der Angemeldeten findet Montag den 7. April Vormittags von 8 Uhr an im Gymnasial-Gebäude Statt.